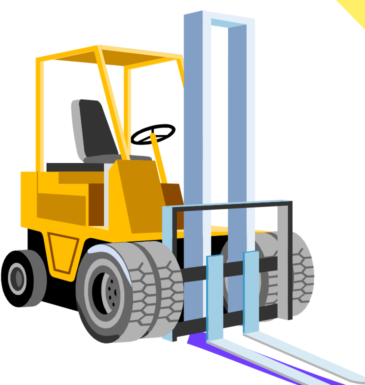
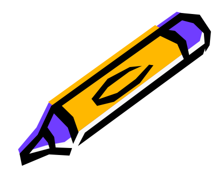
工程數學

Engineering Mathematics



第二章 二階常微分方程式



- 2-1 線性微分方程式之解
- 2-2 常係數線性微分方程式之齊性解
- 2-3 待定係數法
- 2-4 參數變異法
- 2-5 尤拉方程式
- 2-6 高階正合方程式
- 2-7 高階非線性方程式

2-1 線性微分方程式之解

- **二階線性微分方程式的定義**

二階線性常微分方程式可概括為具有以下型式：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (2.1.1)$$

其中，$p(x)$、$q(x)$ 與 $f(x)$ 均為 x 的函數，而當 $f(x) = 0$ 時，該（2.1.1）式稱為**齊性**（homogeneous）微分方程式，反之，則為非齊性微分方程式。

二階線性微分方程式之通解

茲假設二階線性微分方程式可表示如下：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

(1) 首先考慮當 $f(x) = 0$ 時的齊性微分方程式，即

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2.1.2)$$

而若此時有相異兩函數 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 滿足以下兩個性質：

【性質 1】

滿足（2.1.2）式，亦即

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.1.3)$$

【性質 2】

互為**線性獨立**（linearly independent），其 Wronskian 行列式滿足

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)\neq 0 \qquad (2.1.4)$$

則 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 的線性組合 $yh(x)$，即稱為該齊性微分方程式的**通解**（general solution）

$$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \qquad (2.1.5)$$

(2) 接著考慮 $f(x)\neq 0$ 時之非齊性微分方程式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (2.1.6)$$

首先求出其所對應的齊性方程式 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 之解為

$$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

接著找出任一函數 $y_p(x)$，其滿足（2.1.6）式，亦即

$$y_p''+p(x)y_p'+q(x)y_p=f(x) \qquad (2.1.7)$$

則稱 $y_p(x)$ 為此方程式之**特解**（particular solution）。

此時二階非齊性微分方程式之通解即為下式所示：

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \qquad (2.1.8)$$

降階法求解二階線性微分方程式

二階線性微分方程式中，若已知有一齊性解，則其餘的解，可透過**降階法**（method of reduction of order），將微分方程式降為一階而求解之。

茲假設二階線性微分方程式：$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$，且已知齊性解 $y_1(x)$

令

$$y = u(x)y_1(x) \qquad (2.1.9)$$

則

$$y' = u(x)y_1'(x) + u'(x)y_1(x)，\quad y'' = u(x)y_1''(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u''(x)y_1(x)$$

將 y、y'、y'' 代回微分方程式，整理後可得

$$y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' + (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)u = f(x) \quad (2.1.10)$$

由於 $y_1(x)$ 乃該微分方程式的齊性解，故可滿足

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad (2.1.11)$$

因此（2.1.10）式可化簡為

$$y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = f(x) \quad (2.1.12)$$

此乃 $u'(x)$ 的一階線性微分方程式。因此在解出 $u'(x)$ 之後，再予以積分，即可得 $u(x)$，則微分方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的通解為

$$y = u(x)y_1(x) \quad (2.1.13)$$

上述即為利用降階法求解二階非齊性微分方程式的流 程。

另外若僅考慮 $f(x) = 0$ 的齊性微分方程式，即

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 則（2.1.12）式成為

$$y_1 u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0 \qquad (2.1.14)$$

此乃 $u'(x)$ 的一階可分離變數微分方程式，經分離變數後得

$$\frac{u''}{u'} + \frac{2y_1' + p(x)y_1}{y_1} = 0 \qquad (2.1.15)$$

亦即

$$\frac{du'}{u'} = -2\frac{dy_1}{y_1} - p(x)dx \qquad (2.1.16)$$

積分可得

$$\ln|u'| = -2\ln|y_1| - \int p(x)dx + \ln|c_1| \qquad (2.1.17)$$

即

$$u' = \frac{c_1}{y_1^{\,2}} e^{-\int p(x)dx} \qquad (2.1.18)$$

再積分可得 $u(x)$

$$u(x) = c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^{\,2}(x)} dx + c_2 \qquad (2.1.19)$$

因此齊性微分方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的通解為

$$y = u(x)y_1(x) = c_1 y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^{\,2}(x)} dx + c_2 y_1(x) \qquad (2.1.20)$$

[範例 1] 考慮微分方程式 $y'' + 4y = 0$ 及兩函數 $y_1(x) = \cos(2x)$，$y_2(x) = \sin(2x)$。

由於

$$\begin{cases} y_1'' + 4y_1 = -4\cos(2x) + 4\cos(2x) = 0 \\ y_2'' + 4y_2 = -4\sin(2x) + 4\sin(2x) = 0 \end{cases}$$

因此，y_1 與 y_2 均為 $y'' + 4y = 0$ 之解。

又其 Wronskian 行列式之計算結果為

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x) = 2 \neq 0$$

可知 y_1 與 y_2 確為 $y'' + 4y = 0$ 之線性獨立解，故線性微分方程式 $y'' + 4y = 0$ 之通解可表示為

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$$

[範例 2] 考慮微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ 與兩函數 $y_1(x) = e^x$，$y_2(x) = e^{-2x}$ 。

由於

$$\begin{cases} y_1'' + y_1' - 2y_1 = e^x + e^x - 2e^x = 0 \\ y_2'' + y_2' - 2y_2 = 4e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

且其 Wronskian 行列式之計算結果為

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -3e^{-x} \neq 0$$

可知 y_1 與 y_2 確為此線性微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ 之線性獨立解，故其通解可表示為

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

[範例 3] 考慮微分方程式 $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ 與兩函數 $y_1(x) = x^3$，$y_2(x) = x^3 \ln x$，且 $x > 0$。

由於

$$\begin{cases} x^2y_1'' - 5xy_1' + 9y_1 = 6x^3 - 15x^3 + 9x^3 = 0 \\ x^2y_2'' - 5xy_2' + 9y_2 = 6x^3 \ln x + 5x^3 - 15x^3 \ln x - 5x^3 + 9x^3 \ln x = 0 \end{cases}$$

且其 Wronskian 行列式之計算結果為

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \ln x \\ 3x^2 & x^2 + 3x^2 \ln x \end{vmatrix} = x^5 \neq 0 \quad (\because x > 0)$$

可知 y_1 與 y_2 確為線性微分方程式 $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$，$x \neq 0$，之線性獨立解，故其通解可表示為

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1x^3 + c_2x^3 \ln x$$

[範例 4] 考慮微分方程式 $yy''-(y')^2-3y'=0$ ，試說明以及 $y_1(x)=2e^{-x}-3$ 均為其解，且 y_1 與 y_2 互為線性獨立，但它們的線性組合，例如 $2y_1-3y_2$ 或者 $-y_1$ 卻都不是該微分方程式之解。

由於

$$\begin{cases} y_1y_1''-\left(y_1'\right)^2-3y_1'=2e^{-x}\left(2e^{-x}-3\right)-\left(-2e^{-x}\right)^2-3\left(-2e^{-x}\right)=0 \\ y_2y_2''-\left(y_2'\right)^2-3y_2'=9e^{3x}\left(1+e^{3x}\right)-\left(3e^{3x}\right)^2-3\left(3e^{3x}\right)=0 \end{cases}$$

因此，y_1 與 y_2 均是微分方程式 $yy''-(y')^2-3y'=0$ 之解，且其 Wronskian 行列式之計算結果為

$$W(x)=\begin{vmatrix} 2e^{-x}-3 & 1+e^{3x} \\ -2e^{-x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}=8e^{2x}-9e^{3x}+2e^{-x}\neq 0$$

可知 y_1 與 y_2 互為線性獨立。

然而，此處必須說明的是，因為 $yy''-(y')^2-3y'=0$ 乃一非線性微分方程式，因此，y_1 與 y_2 任意之線性組合 $c_1y_1+c_2y_2$ 並不保證均為該非線性微分方程式之解。

[範例 5] 已知微分方程式 $y''-2y'+y=0$ 有一解 e^x，試求另一線性獨立解及方程式之通解？

<解>

因已知 e^x 乃微分方程式之一齊性解，可令 $y=u(x)e^x$

且

$$y'=u(x)e^x+u'(x)e^x \text{，} y''=u(x)e^x+2u'(x)e^x+u''(x)e^x$$

再將 y，y'，y'' 代回微分方程式，可得

$$u(x)e^x+2u'(x)e^x+u''(x)e^x-2\left[u(x)e^x+u'(x)e^x\right]+u(x)e^x=0$$

予以整理後，可求得 $u''(x)=0$

積分可求得 $u(x)$ $u'(x)=c_1$，$u(x)=c_1x+c_2$

故線性微分方程式 $y''-2y'+y=0$ 之通解可表示為

$$y=u(x)e^x=c_1xe^x+c_2e^x$$

亦即此方程式之另一個線性獨立解為 xe^x。

[範例 6] 已知微分方程式 $(1-2x)y''+4xy'-4y=0$ 有一解 x，試求微分方程式之通解。

<解>

已知 x 是微分方程式之一齊性解，可令 $y=xu(x)$

則

$$y'=u(x)+xu'(x)\,,\quad y''=2u'(x)+xu''(x)$$

將 y，y'，y'' 代回微分方程式得

$$(1-2x)\left[2u'(x)+xu''(x)\right]+4x\left[u(x)+xu'(x)\right]-4xu(x)=0$$

整理得

$$u''+\left(\frac{2}{1-2x}+\frac{2}{x}-2\right)u'=0$$

上式為 u' 的一階可分離變數微分方程式，其解為

$$\ln|u'|=\ln|1-2x|-2\ln|x|+2x+\ln|c_1|$$

亦即

$$u'=c_1\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)e^{2x}$$

積分可得

$$u(x) = c_1 \frac{e^{2x}}{x} + c_2$$

故線性微分方程式 $(1-2x)y''+4xy'-4y=0$ 之通解可表示為

$$y = xu(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x$$

亦即本微分方程式之另一個線性獨立解為 e^{2x}。

2-2 常係數線性微分方程式之齊性解

常係數線性微分方程式的定義

二階常係數線性微分方程式具有以下的型式：

$$y'' + Ay' + By = f(x) \qquad (2.2.1)$$

其中係數 A 與 B 均為實數常數，換言之，當此類線性微分方程式之係數均為常數時，即稱之為常係數線性微分方程式。

常係數線性微分方程式之齊性解

茲考慮二階常係數線性微分方程式如下： $y'' + Ay' + By = f(x)$

則其所對應之齊性微分方程式為

$$y'' + Ay' + By = 0 \qquad (2.2.2)$$

求得（2.2.2）式之通解即得（2.2.1）式之原微分方程式之**齊性解**（homogeneous solution）。

再觀察（2.2.2）式，其解 $y(x)$ 必須滿足其各階導數與常數之乘積和等於零，方能符合此項特性的函數，而可適用之最簡單函數應屬於指數函數，因為指數函數在微分前後只有常數倍數的 差別（即 $e^{\lambda x}$ 與 $\lambda e^{\lambda x}$）。故可令

$$y = e^{\lambda x} \quad (2.2.3)$$

則 $y(x)$ 之一、二階導數將分別為 $y' = \lambda e^{\lambda x}$，$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$
其中為常數。再將 y，y'，y'' 代回（2.2.2）式中整理後，可得

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + A\lambda + B) = 0 \quad (2.2.4)$$

且由於 $e^{\lambda x} \neq 0$，於是可得

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \quad (2.2.5)$$

上述（2.2.5）式即稱為 $y'' + Ay' + By = 0$ 之**特徵方程式**（characteristic equation），其乃一以 λ 為根的二次代數方程式，求解該 λ 值便可得到微分方程式之解 $e^{\lambda x}$。於是並可推得，特徵方程式（2.2.5）的根為

$$\lambda = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \quad (2.2.6)$$

(1) 特徵方程式具相異實根（$A^2 - 4B > 0$）

若此兩相異實根為λ_1 與 λ_2，且$\lambda_1 \neq \lambda_2$，則 $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ 以及 $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ 為線性獨立解（因為此時$\lambda_1 \neq \lambda_2$，且其 Wronskian 行列式之計算結果為 $(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$)，故微分方程式之齊性解可表示如下

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (2.2.7)$$

(2) 特徵方程式之解為重根（$A^2 - 4B = 0$）

若特徵方程式具有兩實數重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ ，則可知必存在有一解 $y^1(x) = e^{\lambda_0 x}$ ，即可利用 2-1 節所介紹之降階法（參考 2-1 節的範例5）續推導另一線性獨立解 $y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}$（此時 y^1 與 y^2 之 Wronskian 行列式之計算結果為 $e^{2\lambda_0 x} \neq 0$ ），於是微分方程式之齊性解可表示如下

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x} \quad (2.2.8)$$

(3) 特徵方程式具共軛複數根（$A^2 - 4B < 0$）

當 $A^2 - 4B < 0$ 時，即表示特徵方程式具有複數根，且彼此成共軛對，亦即 $\lambda = \alpha \pm j\beta$，此時兩線性獨立解為 $y_1(x) = e^{(\alpha + j\beta)x}$ 以及 $y_2(x) = e^{(\alpha - j\beta)x}$（其Wronskian 行列式之計算結果為 ），則微分方程式之齊性解可表示如下

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{(\alpha + j\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)x} \qquad (2.2.9)$$

然而，這樣的解是複數函數的型式，因此，一般常利用**尤拉公式**（Euler's formula）：$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$，進一步將（2.2.9）式予以整理成實數函數的型式：

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{(\alpha + j\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)x} = c_1 e^{\alpha x} e^{j\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-j\beta x} \\ &= c_1 e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + j\sin(\beta x)\right) + c_2 e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - j\sin(\beta x)\right) \\ &= (c_1 + c_2) e^{\alpha x}\cos(\beta x) + j(c_1 - c_2) e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ &= c_3 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_4 e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{aligned} \qquad (2.2.10)$$

其中 $c_3 = c_1 + c_2$ 且 $c_4 = j(c_1 - c_2)$。

由以上的推導過程可獲知以下結論：

二階常係數線性微分方程式 $y'' + Ay' + By = 0$ 的特徵方程式為$x^2+A\lambda+B=0$ 。而根據特徵方程式之根之三種可能情況，微分方程式之通解也對應到三種不同型式：

(1) 當根為兩相異實數 λ_1、λ_2 時：

微分方程式 $y'' + Ay' + By = 0$ 之通解為 $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

(2) 當根為兩相等實數 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 時：

微分方程式 $y'' + Ay' + By = 0$ 之通解為 $y(x) = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x}$

(3) 當根為共軛複數 $\lambda=\alpha\pm j\beta$時：

微分方程式 $y'' + Ay' + By = 0$ 之通解為

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

[範例 1] 試求 $y'' - 8y' - 48y = x$ 之齊性解。

<解>

本式所對應之齊性微分方程式為 $y'' - 8y' - 48y = 0$

上式之特徵方程式為 $\lambda^2 - 8\lambda - 48 = 0$

求解其根可得 $\lambda = 12,\ -4$

故齊性微分方程式的通解為 $y(x) = c_1 e^{12x} + c_2 e^{-4x}$

此即原微分方程式之齊性解

[範例 2] 求解 $y'' - \sqrt{12}y' + 3y = 0$ 。

<解>

此乃一常係數齊性微分方程式，其特徵方程式為

$$\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 3 = 0$$

求解其根，可得

$$\lambda = \sqrt{3} \text{（重根）}$$

故齊性微分方程式的通解為

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 x e^{\sqrt{3}x}$$

[範例 3] 求解 $y'' + 4y' + 29y = 0$，$y(0) = 2$，$y'(0) = 1$。

<解>

此齊性微分方程式之特徵方程式為

$$\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$$

其根為

$$\lambda = -2 \pm 5j$$

因此可得齊性微分方程式的通解為

$$y(x) = c_1 e^{-2x}\cos(5x) + c_2 e^{-2x}\sin(5x)$$

且可得其微分後為

$$y'(x) = (-2c_1 + 5c_2)e^{-2x}\cos(5x) - (5c_1 + 2c_2)e^{-2x}\sin(5x)$$

續將初始條件 $y(0) = 2$，$y'(0) = 1$ 代入 y 與 y'，可求得

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 \\ y'(0) = -2c_1 + 5c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

故微分方程式之解為

$$y(x) = 2e^{-2x}\cos(5x) + e^{-2x}\sin(5x)$$

[範例 4] 求解 $y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$。

<解>

此乃三階之齊性微分方程式，其特徵方程式為

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0$$

其根為 $\lambda = -1,\ \ -1 \pm 2j$

則齊性微分方程式的通解為 $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}\cos(2x) + c_3 e^{-x}\sin(2x)$

[範例 5] 某一線性微分方程式的通為 $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 x^2 e^{-2x}$，試求出該微分方程式。

<解>

由題意可知，該微分方程式對應於一個三次特徵方程式，且根為

$$\lambda = -2 \text{（三重根）}$$

故可得其特徵方程式 $(\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0$

亦即該齊性微分方程式為

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$$

2-3 待定係數法

- **待定係數法（method of undetermined coefficients）的原理**

  考慮二階常係數線性微分方程式：

  $$y'' + Ay' + By = f(x) \qquad (2.3.1)$$

  若 $h(x) \neq 0$，上式為一非齊性微分方程式，且其通解為

  $$y = y_h + y_p$$

  其中，y_h 是該方程式之齊性解，y_p 則為其特解。

以待定係數法求特解

設 $P(x) = p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n$、$Q(x) = q_0 + q_1x + \ldots + q_nx^n$、$R(x) = r_0 + r_1x + \ldots + r_nx^n$ 均為 n 階多項式（$n = 0$ 時則為常數），表 2-1 列出於不同型式之非齊性項 $f(x)$ 時，應如何對特解 的型式作假設。

表 2-1 不同型式之非齊次項及其特解之型式

$f(x)$ 的型式	$y_p(x)$ 的型式
$P(x)$	$Q(x)$
αe^{ax}	Ae^{ax}
$\alpha\cos(ax+b)$ 或 $\beta\sin(ax+b)$	$A\cos(ax+b)+B\sin(ax+b)$
$P(x)e^{ax}$	$Q(x)e^{ax}$
$P(x)\cos(ax+b)$ 或 $P(x)\sin(ax+b)$	$Q(x)\cos(ax+b)+R(x)\sin(ax+b)$
$P(x)e^{ax}\cos(ax+c)$ 或 $P(x)e^{ax}\sin(ax+c)$	$e^{ax}[Q(x)\cos(bx+c)+R(x)\sin(bx+c)]$

此外，尚需注意的是，當特解 y_p 的假設項與齊性解 y_h 重複時，應將 y_p 乘上一個修正因子 x^{α} 作修正，其中 α 為使得 y_p 與 y_h 沒有重複項的最小正整數（對於二階微分方程式來說，α 的可能值為 0、1、2）。

利用待定係數法來求解非齊性微分方程式 $y'' + Ay' + By = f(x)$ 的步驟，可整理如下：

(1) 求解 $y'' + Ay' + By = 0$，得到齊性解 y_h 。

(2) 根據 $f(x)$ 之特性，進行特解 y_p 的型式之假設，而若經假設後之特解 y_p 與 y_h 有重複之處，則反覆將 y_p 乘上 x，直到完全沒有重複為止，並在計算 y'_p 與 y''_p 之後，一併將其代回原微分方程式求出待定的係數，以求得特解 y_p 。

(3) 故微分方程式的通解即可表示為 $y = y_h + y_p$ 。

[範例 1] 求解 $y''-8y'-48y=x$ 。

<解>

其所對應之齊性微分方程式 $y''-8y'-48y=0$

特徵方程式 $\lambda^2-8\lambda-48=0$ 之根為 $\lambda=12$ ，-4，則齊性解

$$y_h=c_1e^{12x}+c_2e^{-4x}$$

又非齊性項 $f(x)=x$，故假設特解為

$$y_p=Ax+B$$

此時該假設項與齊性解並無重複，且

$$y_p'=A \quad , \quad y_p''=0$$

將 y_p、y'_p 以及 y''_p 代回方程式，則

$$-8A-48(Ax+B)=x$$

比較兩端係數，可得

$$A=-\frac{1}{48}\text{，}B=\frac{1}{288}$$

則特解為

$$y_p=-\frac{1}{48}x+\frac{1}{288}$$

故微分方程式之通解可表示為

$$y(x)=y_h+y_p=c_1e^{12x}+c_2e^{-4x}-\frac{1}{48}x+\frac{1}{288}$$

[範例 2] 求解 $y'' - 4y' + 3y = 2e^x$ 。

<解>

本題對應之齊性微分方程式為 $y'' - 4y' + 3y = 0$

其特徵方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ，且根為 $\lambda = 1$ ， 3 ，

故齊性解

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

非齊性項 $f(x) = 2e^x$，故假設特解

$$y_p = Ae^x$$

但因假設項與齊性解重複，故需將其乘上 x 作修正，成為

$$y_p = Axe^x$$

此時修正後之假設項與齊性解並無重複，且

$$y_p' = (Ax + A)e^x \quad，\quad y_p'' = (Ax + 2A)e^x$$

可將 y_p、y'_p 以及 y''_p 代回方程式，經整理後可得

$$-2Ae^x = 2e^x$$

故

$$A = -1$$

則特解為

$$y_p = -xe^x$$

亦即微分方程式之通解為

$$y(x) = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - xe^x$$

[範例 3] 求解 $y'' + 4y' + 29y = 13\cos(5x)$。

<解>

本題所對應之齊性微分方程式為 $y'' + 4y' + 29y = 0$

其特徵方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$ 之根為 $\lambda = -2 \pm 5j$，亦即齊性解為

$$y_h = c_1 e^{-2x}\cos(5x) + c_2 e^{-2x}\sin(5x)$$

又根據非齊性項 f(x) = 13 cos(5x)，因此可假設特解之型式為

$$y_p = A\cos(5x) + B\sin(5x)$$

此時假設項與齊性解並無重複，且可得

$$y_p' = 5B\cos(5x) - 5A\sin(5x) \quad , \quad y_p'' = -25A\cos(5x) - 25B\sin(5x)$$

因此將 y_p、y'_p 以及 y''_p 代回方程式，整理可得

$$(4A+20B)\cos(5x)+(-20A+4B)\sin(5x)=13\cos(5x)$$

比較兩端係數

$$\begin{cases} 4A+20B=13 \\ -20A+4B=0 \end{cases} \Rightarrow \quad A=\frac{1}{8},\quad B=\frac{5}{8}$$

故特解為

$$y_p=\frac{1}{8}\cos(5x)+\frac{5}{8}\sin(5x)$$

本微分方程式之通解為

$$y(x)=y_h+y_p=c_1e^{-2x}\cos(5x)+c_2e^{-2x}\sin(5x)+\frac{1}{8}\cos(5x)+\frac{5}{8}\sin(5x)$$

[範例 4] 求解 $y'' + 6y' + 9y = 12xe^{-3x}$。

<解>

本題對應之齊性微分方程式為 $y'' + 6y' + 9y = 0$

其特徵方程式為 $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$，該式具有重根 $\lambda = -3$，

故齊性解可表示為

$$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$$

又根據非齊性項 $f(x) = 12xe^{-3x}$，而可假設特解為

$$y_p = (Ax + B)e^{-3x}$$

但此時假設項仍與齊性解有重複之處，於是可將其乘上 x，即為

$$y_p = (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$$

惟此時再觀察其中的 Bxe^{-3x}，仍與齊性解重複，於是再乘上 x，亦即 $y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^{-3x}$

至此，假設項與齊性解已無重複，故可進行微分

$$y_p' = \left[-3Ax^3 + (3A-3B)x^2 + 2Bx\right]e^{-3x}$$

$$y_p'' = \left[9Ax^3 + (9B-18A)x^2 + (6A-12B)x + 2B\right]e^{-3x}$$

將 y_p、y'_p 以及 y''_p 代回方程式，並整理得

$$\left[(6A-48B)x + 2B\right]e^{-3x} = 12xe^{-3x}$$

再經係數之比較，可得

$$A = 2，B = 0$$

因此特解為 $y_p = 2x^3e^{-3x}$

且微分方程式之通解為

$$y(x) = y_h + y_p = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x} + 2x^3e^{-3x}$$

[範例 5] 求解 $y''-4y'+5y=8x\cos(x)+4\sin(x)$。

<解>

本式所對應之齊性微分方程式為 $y''-4y'+5y=0$

其特徵方程式 $\lambda^2-4\lambda+5=0$ 之根為 $\lambda=2\pm j$，且齊性解為

$$y_h=c_1e^{2x}\cos(x)+c_2e^{2x}\sin(x)$$

又因本題原式之非齊性項 $f(x)=8x\cos(x)+4\sin(x)$，故可假設特解為

$$y_p=(Ax+B)\cos(x)+(Cx+D)\sin(x)$$

並確認假設項與齊性解並無重複，於是可求

$$y_p'=(Cx+A+D)\cos(x)+(-Ax-B+C)\sin(x)$$

$$y_p''=(-Ax-B+2C)\cos(x)+(-Cx-2A-D)\sin(x)$$

將 y_p、y'_p 以及 y''_p 代回方程式，整理得

$$(4A-4C)x\cos(x)+(-4A+4B+2C-4D)\cos(x)+(4A+4C)x\sin(x)$$
$$+(-2A+4B-4C+4D)\sin(x)=8x\cos(x)+4\sin(x)$$

比較兩端係數得

$$\begin{cases} 4A - 4C = 8 \\ 4A + 4C = 0 \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} -4A + 4B + 2C - 4D = 0 \\ -2A + 4B - 4C + 4D = 4 \end{cases}$$

可解出

$$A = 1，B = 1，C = -1，D = -1/2$$

則特解為

$$y_p = (x+1)\cos(x) - (x+0.5)\sin(x)$$

故微分方程式之通解

$$y(x) = y_h + y_p = c_1 e^{2x}\cos(x) + c_2 e^{2x}\sin(x) + (x+1)\cos(x) - (x+0.5)\sin(x)$$

[範例 6] 求解 $y''-2y'=-2-2e^{2x}\sin(2x)$ 。

<解>

本題所對應之齊性微分方程式為 $y''-2y'=0$

其特徵方程式 $\lambda^2-2\lambda=0$ 之根為 $\lambda=0$ ，2 ，齊性解為

$$y_h=c_1+c_2e^{2x}$$

令 y_{p1} 為 $y''-2y'=-2$ 之特解，則非齊性項 $f_1(x)=-2$，據此假設 $y_{p1}=A$

與齊性解重複，修正為 $y_{p1}=Ax$ ， $y'_{p1}=A$ ， $y''_{p1}=0$

將以上代回整理得 $A=1 \Rightarrow y_{p1}=x$

又令 y_{p2} 為 $y''-2y'=-2e^{2x}\sin(2x)$ 之特解則 $f_2(x)=-2e^{2x}\sin(2x)$，據此假設

$$y_{p2}=e^{2x}\left[B\cos(2x)+C\sin(2x)\right]$$

此假設與齊性解無重複，且

$$y'_{p2} = e^{2x}\left[(2B+2C)\cos(2x)+(2C-2B)\sin(2x)\right]$$

$$y''_{p2} = e^{2x}\left[8C\cos(2x)-8B\sin(2x)\right]$$

將 y_{p2}、y'_{p2} 以及 y''_{p2} 代回整理

$$e^{2x}\left[(4C-4B)\cos(2x)+(-4B-4C)\sin(2x)\right] = -2e^{2x}\sin(2x)$$

比較係數得

$$B = C = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y_{p2} = \frac{1}{4}e^{2x}\left[\cos(2x)+\sin(2x)\right]$$

故微分方程式之通解為

$$y(x) = y_h + y_{p1} + y_{p2} = c_1 + c_2 e^{2x} + x + \frac{1}{4}e^{2x}\left[\cos(2x)+\sin(2x)\right]$$

2-4 參數變異法

參數變異法的推導

考慮二階線性常微分方程式：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad （2.4.1）$$

此處必須說明的是，當 $p(x)$、$q(x)$ 並非常數，或者 $f(x)$ 是一些比較特殊的函數時（如 $\sec x$、$\ln x$ 等），則上節所述之待定係數法就較無法派上用場，而必須利用本節介紹之**參數變異法**（method of variation of parameters）來求解。

就（2.4.1）式而言，假設該式具有齊性解 $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$，且 y_1 與 y_2 線性獨立，並滿足

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases} \quad （2.4.2）$$

而參數變異法之目的即在於求得兩函數 $u(x)$ 與 $v(x)$，以計算得出微分方程式的特解如下：

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \qquad (2.4.3)$$

因此首先於此處進行推導。若先對（2.4.3）式微分，可得

$$y_p' = uy_1' + vy_2' + u'y_1 + v'y_2$$

而為了簡化公式的推導，在此附加上一個條件，即令

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \qquad (2.4.4)$$

於是可簡化得到

$$y_p' = uy_1' + vy_2' \qquad (2.4.5)$$

即

$$y_p'' = uy_1'' + vy_2'' + u'y_1' + v'y_2' \qquad (2.4.6)$$

再將 y_p、y'_p 以及 y''_p 代回（2.4.1）式之微分方程式，

可得 $uy_1''+vy_2''+u'y_1'+v'y_2'+p(x)\left[uy_1'+vy_2'\right]+q(x)\left[u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x)\right]=f(x)$

上式可整理成

$$u\left[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1\right]+v\left[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2\right]+u'y_1'+v'y_2'=f(x)$$

且根據（2.4.2）式之已知恆等式，可知上式兩個中括號之值均為零，故即可化簡為

$$u'y_1'+v'y_2'=f(x) \qquad (2.4.7)$$

再輔以聯立（2.4.4）式與（2.4.7）式，於是形成兩未知函數 $u'(x)$ 與 $v'(x)$ 的聯立方程組

$$\begin{cases} u'y_1+v'y_2=0 \\ u'y_1'+v'y_2'=f(x) \end{cases} \qquad (2.4.8)$$

此時求解（2.4.8）式，即可得到

$$u'(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}=-\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}$$

以及 $v'(x)=\dfrac{y_1(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}=\dfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$

其中，$W(x)$ 即是 y_1 與 y_2 的 Wronskian 行列式之計算結果，又由於 y_1 與 y_2互為線性獨立，故$W(x)\neq 0$ 。接著再分別積分 $u'(x)$ 及 $v'(x)$，即可求得所要的函數

$$u(x)=-\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx\text{ ， }v(x)=\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx \qquad (2.4.9)$$

將 $u(x)$ 和 $v(x)$ 代回式（2.4.3）即可求得微分方程式的特解 。至於上式中之積分常數則通常可予以忽略（設為0），此乃因即使分別有積分常數 d_1 及 d_2，當其被代回求特解時會得到$d_1y_1+d_2y_2$，而此項已被涵括併入齊性解中。

以參數變異法求特解

利用參數變異法來求解微分方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的步驟整理如下：

(1) 求解 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$，得到齊性解 $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$，並計算其 Wronskian 行列式之計算結果，即 $W(x) = y_1y'_2 - y_2y'_1$

(2) 接著令其特解 $y_p = uy_1 + vy_2$，先求出 $u'(x)$ 及 $v'(x)$，再分別積分後，可得 $u(x)$ 和 $v(x)$：

$$\begin{cases} u'(x) = -\dfrac{y_2(x)f(x)}{W(x)} \\ v'(x) = \dfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \displaystyle\int u'(x)dx = -\int \dfrac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx \\ v(x) = \displaystyle\int v'(x)dx = \int \dfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx \end{cases}$$

(3) 微分方程式的通解即表示為 $y = y_h + y_p = c_1y_1 + c_2y_2 + uy_1 + vy_2$。

[範例 1] 求解 $y'' + 2y' + y = x^{-3}e^{-x}$ 。

<解>

微分方程式之齊性解為 $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} = c_1 y_1 + c_2 y_2$

y_1 與 y_2 之 Wronskian 行列式之計算結果為

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

令特解

$$y_p = uy_1 + vy_2$$

非齊性項 $f(x) = x^{-3}e^{-x}$ ，則

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{y_2(x) f(x)}{W(x)} = -\dfrac{xe^{-x} \cdot x^{-3} e^{-x}}{e^{-2x}} = -x^{-2} \\ v' = \dfrac{y_1(x) f(x)}{W(x)} = \dfrac{e^{-x} \cdot x^{-3} e^{-x}}{e^{-2x}} = x^{-3} \end{cases}$$

積分後，可得 $\begin{cases} u = \int u'(x)dx = \int -x^{-2}dx = x^{-1} \\ v = \int v'(x)dx = \int x^{-3}dx = -\dfrac{1}{2}x^{-2} \end{cases}$

故特解為

$$y_p = uy_1 + vy_2 = \frac{e^{-x}}{2x}$$

微分方程式之通解為

$$y(x) = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{e^{-x}}{2x}$$

[範例 2] 求解 $y'' + 4y = 4\sec(2x)$ 。

<解>

本微分方程式之齊性解為

$$y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

計算 y_1 與 y_2 之 Wronskian 行列式計算結果為

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2$$

令特解為

$$y_p = uy_1 + vy_2$$

又因非齊性項 $f(x) = 4\sec(2x)$，因此可計算得出

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{y_2(x) f(x)}{W(x)} = -\dfrac{4\sin(2x)\sec(2x)}{2} = -2\tan(2x) \\ v' = \dfrac{y_1(x) f(x)}{W(x)} = \dfrac{4\cos(2x)\sec(2x)}{2} = 2 \end{cases}$$

再分別對 u' 及 v' 積分得到

$$\begin{cases} u = \int u'(x)dx = \int -2\tan(2x)dx = \ln\left|\cos(2x)\right| \\ v = \int v'(x)dx = \int 2dx = 2x \end{cases}$$

故特解為

$$y_p = uy_1 + vy_2 = \cos(2x)\ln\left|\cos(2x)\right| + 2x\sin(2x)$$

本微分方程式之通解為

$$y(x) = y_h + y_p = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \cos(2x)\ln\left|\cos(2x)\right| + 2x\sin(2x)$$

[範例 3] 求解 $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{e^{x}+1}$ 。

<解>

首先求得齊性解 $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} = c_1 y_1 + c_2 y_2$

其 Wronskian 行列式之計算結果為

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}$$

令特解 $y_p = uy_1 + vy_2$

又本題之非齊性項 $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{x}+1}$ ，於是可求得

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{y_2(x)f(x)}{W(x)} = \dfrac{e^{-2x}e^{-x}}{e^{-3x}(e^{x}+1)} = \dfrac{1}{e^{x}+1} = 1 - \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} \\[2ex] v' = \dfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)} = -\dfrac{e^{-x}e^{-x}}{e^{-3x}(e^{x}+1)} = -\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} \end{cases}$$

分別積分得

$$\begin{cases} u = \int u'(x)dx = \int\left(1 - \dfrac{e^x}{e^x+1}\right)dx = x - \ln(e^x+1) \\ v = \int v'(x)dx = \int -\dfrac{e^x}{e^x+1}dx = -\ln(e^x+1) \end{cases}$$

故特解為

$$y_p = uy_1 + vy_2 = xe^{-x} - \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln(e^x+1)$$

本微分方程式之通解為

$$y(x) = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + xe^{-x} - \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln(e^x+1)$$

[範例 4] 求解 $4y'' + 36y = \tan(3x)$ 。

<解>

首先將微分方程式之各項同除以 4，以使得 y'' 項的係數為 1，即如下式：

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\tan(3x)$$

首先求得齊性解

$$y_h = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

並計算 y_1 與 y_2 之 Wronskian 行列式之計算結果為

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3$$

令特解

$$y_p = uy_1 + vy_2$$

此時之非齊性項 $f(x)=\dfrac{1}{4}\tan(3x)$，因此可求得

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{1}{12}\sin(3x)\tan(3x) = -\dfrac{1}{12}\dfrac{\sin^2(3x)}{\cos(3x)} = -\dfrac{1}{12}\left[\sec(3x)-\cos(3x)\right] \\ v' = \dfrac{1}{12}\cos(3x)\tan(3x) = \dfrac{1}{12}\sin(3x) \end{cases}$$

分別積分後，可得

$$\begin{cases} u = \displaystyle\int -\dfrac{1}{12}\left[\sec(3x)-\cos(3x)\right]dx = -\dfrac{1}{36}\left[\ln\left|\sec(3x)+\tan(3x)\right| - \sin(3x)\right] \\ v = \displaystyle\int \dfrac{1}{12}\sin(3x)dx = -\dfrac{1}{36}\cos(3x) \end{cases}$$

故特解為

$$y_p = uy_1 + vy_2 = -\frac{1}{36}\ln\left|\sec(3x)+\tan(3x)\right|$$

微分方程式之通解為

$$y(x) = y_h + y_p = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) - \frac{1}{36}\ln\left|\sec(3x)+\tan(3x)\right|$$

[範例 5] 已知 $y_1(x) = x^2$ 與 $y_2(x) = 2x + 1$ 均是微分方程式 $(x^2+x)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 之解，試求出方程式 $(x^2 + x)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 2(x^2 + x)^2$ 之解。

<解>

由題意可知， $y_1(x) = x^2$ 與 $y_2(x) = 2x + 1$ 是以下這個微分方程式之齊性解

$$y'' - \frac{2x+1}{x^2+x}y' + \frac{2}{x^2+x}y = 2x^2 + 2x$$

亦即

$$y_h = c_1 x^2 + c_2(2x+1)$$

又計算 y_1 與 y_2 之 Wronskian 行列式計算結果為

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = -2x^2 - 2x$$

且令特解

$$y_p = uy_1 + vy_2$$

而此時因本題之非齊性項 $f(x)=2x^2+2x$，於是可得

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{y_2(x)f(x)}{W(x)} = \dfrac{(2x+1)(2x^2+2x)}{2x^2+2x} = 2x+1 \\ v' = \dfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)} = -\dfrac{2x^2(x^2+x)}{2x^2+2x} = -x^2 \end{cases}$$

分別積分後，可得

$$\begin{cases} u = \int u'(x)dx = \int (2x+1)dx = x^2 + x \\ v = \int v'(x)dx = \int -x^2 dx = -\dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

故求得特解為

$$y_p = uy_1 + vy_2 = \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3$$

微分方程式之通解為

$$y(x) = y_h + y_p = c_1x^2 + c_2(2x+1) + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3$$

2-5 尤拉方程式

尤拉方程式（Euler's Equation）的定義

二階尤拉常微分方程式具有以下的型式：

$$x^2 y'' + Axy' + By = 0 \qquad (2.5.1)$$

其中 A、B 均為常數。而此類微分方程式可經由變數變換的方法轉換成一個常係數的線性微分方程式，進而予以求解之。

尤拉方程式的求解

考慮二階尤拉常微分方程式：$x^2 y'' + Axy' + By = 0$，以下將討論其解在 x > 0 的情況。

首先構思應用指數函數推導方程式中之變數變換，即令

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x,\ x > 0$$

以及 $y(x) = y(e^t) = Y(t)$ （2.5.2）

則 $y'(x) = \dfrac{dy(x)}{dx} = \dfrac{dY(t)}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}Y'(t)$ （2.5.3）

且

$$
\begin{aligned}
y''(x) &= \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}Y'(t)\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(Y'(t)\right) + Y'(t)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{dY'(t)}{dt}\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2}Y'(t) \\
&= \frac{1}{x^2}Y''(t) - \frac{1}{x^2}Y'(t)
\end{aligned}
$$

（2.5.4）

將（2.5.2）、（2.5.3）以及（2.5.4）式代回尤拉方程式中，可得

$$x^2\left[\frac{1}{x^2}Y''(t) - \frac{1}{x^2}Y'(t)\right] + Ax\left(\frac{1}{x}Y'(t)\right) + BY(t) = 0$$

整理得

$$Y''(t)+(A-1)Y'(t)+BY(t)=0 \qquad (2.5.5)$$

由（2.5.5）式可知，此時 $Y(t)$ 已為常係數線性二階微分方程式，換言之，其求解 $Y(t)$之方法可參考 2-2 節所述者，即可予以解出，不過於此必須留意的是，求完 $Y(t)$ 之解後，尚需經由 $t=\ln x$ 將 $Y(t)$ 轉換回原尤拉方程式之解 $y(x)$，亦即

$$y(x)=Y(t)\big|_{t=\ln x}=Y(\ln x) \qquad (2.5.6)$$

以上是在 $x>0$ 的情況下所做的討論，此外，若欲考慮 $x<0$ 之解，則須將 $\ln x$ 更改為 $\ln|x|$，亦即令$t=\ln|x|$，且最後的解為 $y(x)=Y\left(\ln|x|\right)$。

[範例 1] 求解 $x^2y''+4xy'-4y=0$。

<解>

此微分方程式為尤拉方程式，利用變數變換，即令

$$x=e^t \quad \Rightarrow \quad t=\ln x,\ x>0$$

且 $Y(t)=y(e^t)$ 代入後，原微分方程式轉換為

$$Y''(t)+3Y'(t)-4Y(t)=0$$

其特徵方程式具有兩相異實根 $\lambda_t=1$，-4，故

因此本微分方程式之解為 $Y(t)=c_1e^t+c_2e^{-4t}$

$$y(x)=Y(\ln x)=c_1e^{\ln x}+c_2e^{-4\ln x}=c_1x+c_2x^{-4},\quad x>0$$

[範例 2] 求解 $x^2 y'' - 13xy' + 49y = 0$。

<解>

此微分方程式為尤拉方程式型式，可利用變數變換，即令

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x,\ x > 0$$

且 $Y(t) = y(e^t)$代入後，將微分方程式轉換成

$$Y''(t) - 14Y'(t) + 49Y(t) = 0$$

其特徵方程式之根為 $\lambda_t = 7$（重根），故可得

$$Y(t) = c_1 e^{7t} + c_2 t e^{7t}$$

因此本微分方程式之解為

$$y(x) = Y(\ln x) = c_1 x^7 + c_2 x^7 \ln x \text{，} \quad x > 0$$

[範例 3] 求解 $2x^2y'' - 10xy' + 27y = 0$ 。

<解>

將微分方程式同除以 2，可得 $x^2y'' - 5xy' + \dfrac{27}{2}y = 0$

本式為尤拉方程式，利用變數變換，即令

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x,\ x > 0$$

又 $Y(t) = y(e^t)$，於是可將原式轉換成 $Y''(t) - 6Y'(t) + \dfrac{27}{2}Y(t) = 0$

其特徵方程式具有共軛複數根為 $3 \pm j\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，故

$$Y(t) = c_1e^{3t}\cos(\frac{3}{2}\sqrt{2}t) + c_2e^{3t}\sin(\frac{3}{2}\sqrt{2}t)$$

則本微分方程式之解可求得為

$$y(x) = Y(\ln x) = c_1x^3\cos(\frac{3}{2}\sqrt{2}\ln x) + c_2x^3\sin(\frac{3}{2}\sqrt{2}\ln x)\text{，}x > 0$$

[範例 4] 求解 $x^2 y'' + xy' - y = 2(x - x^{-1})$。

<解>

此微分方程式為尤拉方程式，可利用變數變換，即令

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x,\ x > 0$$

且 $Y(t) = y(e^t)$ 入後，將原式轉換為

$$Y''(t) - Y(t) = 2(e^t - e^{-t})$$

其齊性解為 $\quad Y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

此時非齊性項 $F(t) = 2(e^t - e^{-t})$，故可假設特解為

$$Y_p(t) = Ae^t + Be^{-t}$$

惟此與齊性解重複，故需修正為

$$Y_p(t) = Ate^t + Bte^{-t}$$

且將其微分後，求得

$$Y_p'(t) = (At + A)e^t + (-Bt + B)e^{-t} \quad，\quad Y_p''(t) = (At + 2A)e^t + (Bt - 2B)e^{-t}$$

續再將 Y_p、Y'_p 以及 Y''_p 代回方程式，並予以係數比較後，可得

$$2Ae^t - 2Be^{-t} = 2e^t - 2e^{-t} \quad \Rightarrow \quad A = B = 1$$

故特解為 $$Y_p(t) = t(e^t + e^{-t})$$

亦即，轉換後之微分方程式之通解為

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + t(e^t + e^{-t})$$

則原微分方程式之通解為

$$\begin{aligned} y(x) = Y(\ln x) &= c_1 e^{\ln x} + c_2 e^{-\ln x} + \ln x(e^{\ln x} + e^{-\ln x}) \\ &= c_1 x + c_2 x^{-1} + (x + x^{-1})\ln x \quad，\quad x > 0 \end{aligned}$$

[範例 5] 求解 $x^2y'' - 2xy' + 2y = \sin(x^{-1})$ 。

<解>

此微分方程式為尤拉方程式，可令

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x,\ x > 0$$

且 $Y(t) = y(e^t)$ 予以代入後，即將微分方程式轉換成

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = \sin(e^{-t})$$

首先求得齊性解為

$$Y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} = c_1Y_1(t) + c_2Y_2(t)$$

至於其特解則需以參數變異法求解，而其 Wronskian 行列式計算結果為

$$W(t) = Y_1(t)Y_2'(t) - Y_1'(t)Y_2(t) = e^{3t}$$

又因本題之非齊性項 $F(t)=\sin(e^{-t})$，於是可用參數變異法求得

$$\begin{cases} u=\displaystyle\int -\frac{Y_2(t)F(t)}{W(t)}dt=\int -\frac{e^{2t}\sin(e^{-t})}{e^{3t}}dt=\int -e^{-t}\sin(e^{-t})dt=-\cos(e^{-t}) \\ v=\displaystyle\int \frac{Y_1(t)F(t)}{W(t)}dt=\int \frac{e^{t}\sin(e^{-t})}{e^{3t}}dt=\int e^{-2t}\sin(e^{-t})dt=e^{-t}\cos(e^{-t})-\sin(e^{-t}) \end{cases}$$

亦即本題之特解為

$$Y_p(t)=uY_1(t)+vY_2(t)=-e^{2t}\sin(e^{-t})$$

故轉換後的微分方程式之通解為

$$Y(t)=Y_h(t)+Y_p(t)=c_1e^{t}+c_2e^{2t}-e^{2t}\sin(e^{-t})$$

而原微分方程式之通解即求得為

$$y(x)=Y(\ln x)=c_1x+c_2x^2-x^2\sin(x^{-1}) \quad ， \quad x>0$$

[範例 6] 某微分方程式的通解

為 $y(x) = x^{-2}\left[c_1 \cos(3\ln x) + c_2 \sin(3\ln x)\right]$，試求出該微分方程式。

<解>

利用變數變換，令

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x,\ x > 0$$

且 $Y(t) = y(e^t)$，則得到

$$Y(t) = y(e^t) = e^{-2t}\left[c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)\right]$$

此乃一常係數的二階齊性微分方程式之通解，亦即該微分方程式可因而表示為

$$Y''(t) + 4Y'(t) + 13Y(t) = 0$$

最後，再由 $t = \ln x$ 以及 $y(x) = Y(\ln x)$ 之代換，即可轉換回原微分方程式如下

$$x^2 y'' + 5xy' + 13y = 0$$

此處並可看出本題之解乃一尤拉方程式。

2-6 高階正合方程式

正合微分方程式的定義

考慮 n 階線性常微分方程式如下：

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x) \qquad (2.6.1)$$

其中 $p_0(x)$、$p_1(x)$、⋯、$p_n(x)$ 均為 x 的函數，若其滿足

$$p_0(x) - p_1'(x) + p_2''(x) + \cdots + (-1)^n p_n^{(n)}(x) = 0 \qquad (2.6.2)$$

則稱（2.6.1）式為 n 階正合微分方程式。

正合微分方程式的求解

以二階正合微分方程式 $p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$

為例：

由於

$$\left[p_2(x)y'\right]' = p_2(x)y'' + p_2'(x)y'$$

即
$$p_2(x)y'' = \left[p_2(x)y'\right]' - p_2'(x)y'$$

代回整理得
$$\left[p_2(x)y'\right]' + \left[p_1(x) - p_2'(x)\right]y' + p_0(x)y = f(x)$$

又
$$\left[\left(p_1(x) - p_2'(x)\right)y\right]' = \left[p_1(x) - p_2'(x)\right]y' + \left[p_1(x) - p_2'(x)\right]' y$$

亦即
$$\left[p_1(x) - p_2'(x)\right]y' = \left[\left(p_1(x) - p_2'(x)\right)y\right]' - \left[p_1'(x) - p_2''(x)\right]y$$

再代回整理可得
$$\left[p_2(x)y'\right]' + \left[\left(p_1(x) - p_2'(x)\right)y\right]' + \left[p_0(x) - p_1'(x) + p_2''(x)\right]y = f(x)$$

根據定義，正合微分方程式須滿足式（2.6.2）式，對二階而言，即
$$p_0(x) - p_1'(x) + p_2''(x) = 0 \qquad （2.6.3）$$

故正合方程式可整理成

$$\left[p_2(x)y'\right]' + \left[\left(p_1(x) - p_2'(x)\right)y\right]' = f(x) \qquad (2.6.4)$$

此時對（2.6.4）式中之各項分別積分一次，即成為一階線性常微分方程式

$$p_2(x)y' + \left[p_1(x) - p_2'(x)\right]y = \int f(x)dx + c$$

最後，求解該一階線性微分方程式即得原正合方程式之解。

[範例 1] 求解 $x^2y''+5xy'+3y=0$ 。

<解>

此為一尤拉方程式，其中

$$p_0(x)=3,\ \ p_1(x)=5x,\ \ p_2(x)=x^2$$

且

$$p_0(x)-p_1'(x)+p_2''(x)=3-5+2=0$$

故此微分方程式正合，可化簡為 $\left(x^2y'\right)'+\left(3xy\right)'=0$

再將兩端分別積分後，可得

$$x^2y'+3xy=c_1 \quad\Rightarrow\quad y'+3x^{-1}y=c_1x^{-2}$$

此時已可看出上式乃一階線性微分方程式，其積分因子為

$$e^{\int 3x^{-1}dx}=e^{3\ln x}=x^3$$

且

$$d(x^3y)=c_1xdx \quad\Rightarrow\quad x^3y=c_1x^2+c_2$$

故本題之正合方程式之解為 $y(x)=c_1x^{-1}+c_2x^{-3}$

[範例 2] 求解 $x(x-1)y''+xy'-y=0$。

<解>

分析本題之方程式可知

$$p_0(x)=-1,\ \ p_1(x)=x,\ \ p_2(x)=x^2-x$$

又

$$p_0(x)-p_1'(x)+p_2''(x)=-1-1+2=0$$

故此微分方程式正合，可化簡為 $\left[\left(x^2-x\right)y'\right]'+\left[\left(-x+1\right)y\right]'=0$

再經兩端分別積分後，可得

$$x(x-1)y'-(x-1)y=c_1\quad\Rightarrow\quad y'-\frac{1}{x}y=\frac{c_1}{x(x-1)}$$

此乃一階線性微分方程式，積分因子為 $e^{\int-\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=x^{-1}$

又

$$d(x^{-1}y)=\left(\frac{c_1}{x^2(x-1)}\right)dx\quad\Rightarrow\quad x^{-1}y=c_1\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{x-1}{x}\right)+c_2$$

因此本題之正合方程式之解可求得為 $y(x)=c_1\left(1+x\ln\frac{x-1}{x}\right)+c_2x$

[範例 3] 求解 $x(x+1)y''+(4x+1)y'+2y=2x+1$ 。

<解>

分析本題之方程式可知

$$p_0(x)=2,\ \ p_1(x)=4x+1,\ \ p_2(x)=x^2+x$$

又因

$$p_0(x)-p_1'(x)+p_2''(x)=2-4+2=0$$

故此微分方程式正合，可化簡為

$$\left[x(x+1)y'\right]'+\left(2xy\right)'=2x+1$$

再經兩端分別積分後，可得

$$x(x+1)y'+2xy=x^2+x+c_1 \quad\Rightarrow\quad y'+\frac{2}{x+1}y=\frac{c_1}{x(x+1)}+1$$

此乃一階線性微分方程式，積分因子為

$$e^{\int \frac{2}{x+1}dx} = e^{2\ln(x+1)} = (x+1)^2$$

且

$$d\left((x+1)^2 y\right) = \left(c_1 \frac{x+1}{x} + (x+1)^2\right) dx$$

$$\Rightarrow \quad (x+1)^2 y = c_1(x+\ln x) + \frac{1}{3}(x+1)^3 + c_2$$

因此本題之正合方程式之解為

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left[c_1(x+\ln x)+c_2\right] + \frac{1}{3}(x+1)$$

2-7 高階非線性方程式

- 高階非線性常微分方程式的型式較為繁雜而且變化極多，因此以下僅簡單介紹兩種：

(1) 微分方程式中，因變數 y 不出現（即缺 y 項）

此類方程式可以如下的型式代表之：

$$F(x,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}) = 0$$

例如

$$y'' + 2xy' - (y')^2 = 0$$

以及

$$y' + xy''' = \ln x$$

(2) 微分方程式中，自變數 x 不出現（即缺 x 項）此類方程式可以如下型式代表之：

$$F(y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}) = 0$$

例如

$$y'' + \sin y = 0$$

以及

$$yy'' - (y')^2 + 2y = 0$$