

材料力學, SI制

[第八版]

Mechanics of Materials

JAMES M. GERE

BARRY J. GOODNO

林坤楠譯



上課時間

- 周二晚上第1、2節
 - (18:40—20:25)

評量方式

- 期中考或報告(30%)
- 期末考或報告(30%)
- 平時成績(40%)
 - 平時成績包括
 - ◆ 出席情形
 - ◆ 上課表現
 - ◆ 隨堂測驗練習
 - ◆ 作業

1 拉力、壓力與剪力

1.1 材料力學簡介

1.2 正向應力和正向應變

1.3 材料的機械性質

1.4 彈性、塑性和潛變

1.5 線性彈性、虎克定律和波生比

1.6 剪應力和剪應變

1.7 容許應力與容許載重

1.8 軸向載重和直接剪力的設計

2 軸向載重桿件

2.1 簡介

2.2 軸向受載重的桿長變化

2.3 非均勻條件下的桿長變化

2.4 靜不定結構

2.5 熱效應、組裝不良和預應變

2.6 應變能

*2.7 衝擊載重

3 扭轉

3.1 簡介

3.2 圓桿之扭轉變形

3.3 線性彈性材料之圓桿

3.4 非均勻扭轉

3.5 純剪的應力與應變

3.6 E 、 G 彈性模數關係

3.7 圓軸的動力傳遞

3.8 靜不定扭轉桿件

3.9 扭轉和純剪下的應變能

3.10 薄壁管

4 剪力與彎矩

4.1 簡介

4.2 樑、載重和反作用的型態

4.3 剪力和彎矩

4.4 載重、剪力和彎矩的關係

4.5 剪力圖和彎矩

5 樑的應力

5.1 簡介

5.2 純彎曲與非均勻彎曲

5.3 樑的曲率

5.4 樑的縱向應變

5.5 樑的正向應力(線性彈性材料)

5.6 彎曲應力的樑設計

5.7 矩形橫截面樑的剪應力

5.8 圓形橫截面樑的剪應力

5.9 寬翼樑腹板的剪應力

6 應力與應變分析

6.1 簡介

6.2 平面應力

6.3 主應力和最大剪應力

6.4 平面應力之摩爾圓

6.5 平面應力之虎克定律

6.6 三軸應力

6.7 平面應變

7 平面應力的應用

7.1 簡介

7.2 球形壓力容器

7.3 圓柱形壓力容器

7.4 樑的最大應力

7.5 組合載重

8 樑的撓曲

8.1 簡介

8.2 撓曲曲線的微分方程式

8.3 利用彎矩方程式的積分求撓度

8.4 利用剪力和載重方程式的積分求撓度

8.5 重疊法

8.6 彎矩-面積法

8.7 非等橫截面樑

8.8 彎曲的應變能

*8.9 卡氏定理

9 靜不定樑

9.1 簡介

9.2 靜不定樑的型態

9.3 利用撓曲曲線的微分方程式分析

9.4 重疊法

10 柱

10.1 簡介

10.2 挫曲與穩定

10.3 兩端銷接的柱

10.4 其他支撐條件下的柱

10.5 偏心軸向載重柱

10.6 柱的正割公式

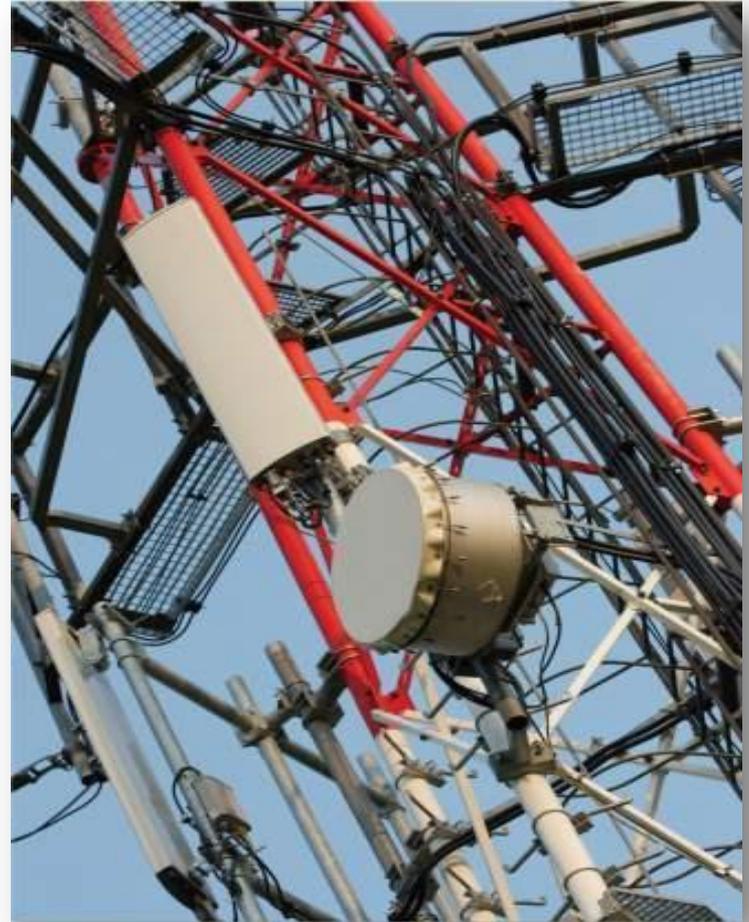
10.7 彈性與非彈性柱的行為

材料力學, SI制

[第八版]

Chapter 1

拉力、壓力與剪力



1 拉力、壓力與剪力

1.1 材料力學簡介

1.2 正向應力和正向應變

1.3 材料的機械性質

1.4 彈性、塑性和潛變

1.5 線性彈性、虎克定律和波生比

1.6 剪應力和剪應變

1.7 容許應力與容許載重

1.8 軸向載重和直接剪力的設計

1.1 材料力學簡介

INTRODUCTION TO MECHANICS OF MATERIALS

- 材料力學 (mechanics of materials) 是應用力學的一支，是處理各種載重下之固體行為。
- 在這領域的其他名稱有材料強度學(strength of materials) 和變形體力學(mechanics of deformable bodies)。
- 本書所考慮的固體涵蓋軸向載重桿件、扭轉的軸、彎曲的樑和受壓的柱等類型。

1.1 材料力學簡介

INTRODUCTION TO MECHANICS OF MATERIALS

- 材料力學的主要目的是求出結構及其他零件在載重作用下，結構與零件的應力、應變和位移。
- 在材料力學中，我們利用靜力學的概念，來探討實體內部的應力與應變，也就是有限尺寸的物體在載重作用下的變形。
- 理論上的分析和實驗的結果在材料力學上，都扮演著相當重要的角色，我們利用這些理論來推導公式與方程式，以預估材料的特性。

1.1 材料力學簡介

INTRODUCTION TO MECHANICS OF MATERIALS

材料力學的發展史是結合理論與實驗而成

- 達文西(Leonardo da Vinci, 1452-1519) 和伽利略(Galileo Galilei, 1564-1642)完成了金屬線、桿件、樑的強度實驗。
- 數學家尤拉(Leonhard Euler, 1707-1783) 在1744年就發展出數學柱理論，並計算出一個柱的臨界載重(critical load)，但當時並無實驗證據顯示尤拉理論結果的重要性。

1.2 正向應力和正向應變

NORMAL STRESS AND STRAIN

材料力學中最基本概念

- **應力(stress) 與應變(strain)**；受力作用的**等截面桿件(prismatic bar)**即可解釋這些最基本的概念。
- 等截面桿件為從頭到尾皆有相同橫截面的直的結構桿件。
- **軸向力(axial force)**，順著桿件指向的軸向載重，在桿件中不是拉力就是壓力。

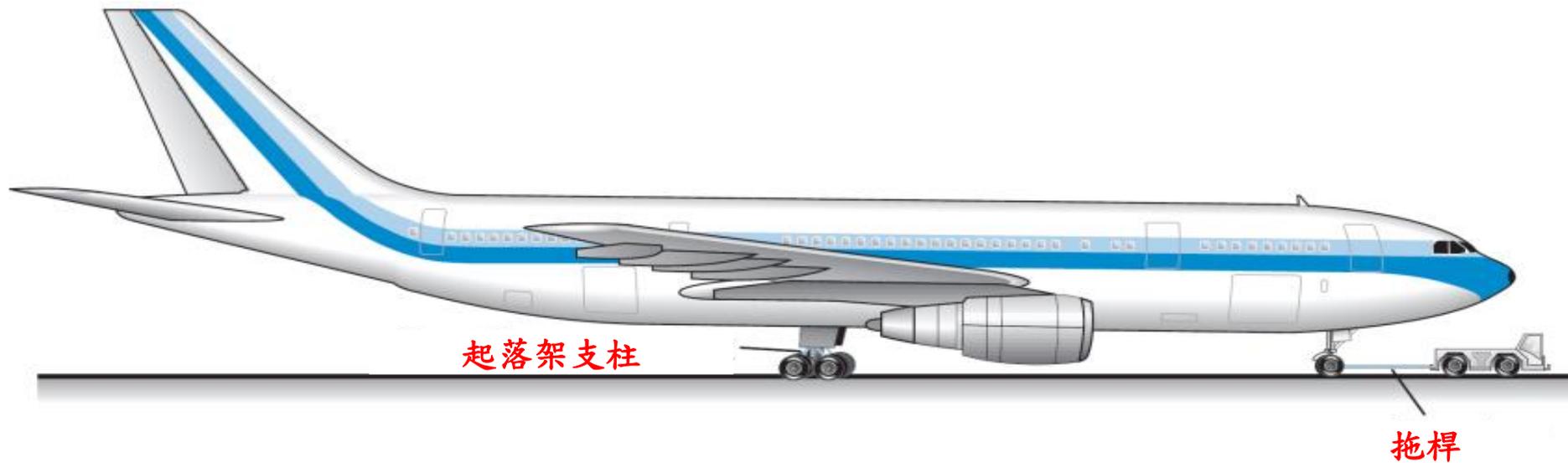


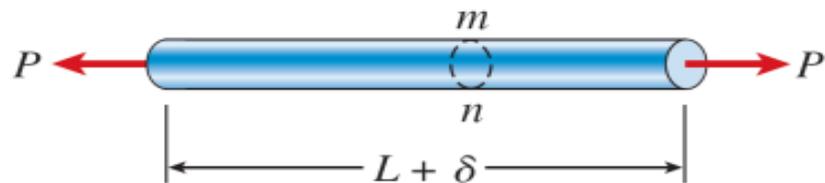
圖1-1 受軸力作用的結構桿件(拖桿承受拉力，起落架支柱承受壓力)



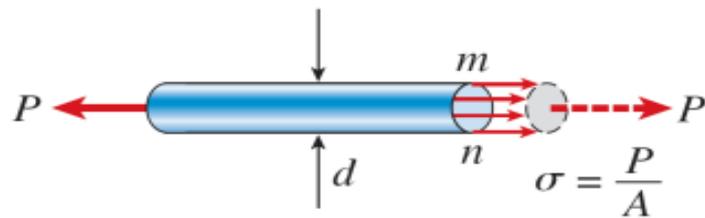
(a)



(b)



(c)



(d)

圖1-2 承受拉力的等截面桿件：
 (a) 拖桿的自由體圖；
 (b) 載重前的桿件；
 (c) 載重後的桿件；
 (d) 拖桿的正向應力圖

1.2 正向應力和正向應變

NORMAL STRESS AND STRAIN

- 假設我們切割桿件，如圖1-2c的 mn 截面，即可看出桿件的內部作用，因為在這裡的 mn 為垂直於桿件縱向軸，所以又稱為**橫截面(cross section)**。
- **應力(stress)**的單位是每一單位面積的力，希臘字母 σ 為(sigma)。

正向應力

- $$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1-1)$$

此公式提供在軸向載重作用下，任意橫截面的等截面桿件的均勻應力。

- 當 P 力拉伸桿件，此應力即為**拉應力(tensile stresses)**
- 造成桿件壓縮的反向應力，則為**壓應力(compressive stresses)**
- 應力作用於垂直切割表面的方向，稱為**正向應力(normal stresses)**
- 正向應力的**符號規則(sign convention)**，習慣上以正向拉應力為正，壓應力為負。

限制

- 唯有應力均佈在桿件橫截面上， $\sigma = P/A$ 才會成立。條件是軸向力 P 作用於通過橫截面積的形心上。
- 一般端點的載重都是透過銷或栓傳遞，造成高局部應力，稱為應力集中(stress concentrations)。
- 一種可能的情形示於圖1-3，載重 P 經由銷傳遞到桿，銷穿過桿兩端的眼孔，因此圖上所示的力實際是銷與眼孔之間的支承壓力。



圖1-3 雙孔桿受到拉力載重 P 的影響

正向應變

- 單位長度的伸長量就等於 $1/L$ 乘以，即為伸長長度/每段長度，或稱為**應變(strain)**，希臘字母為 ϵ ，公式為：

(1-2)

- 拉力桿件的應變則稱為**拉應變(tensile strain)**，代表著材料的伸長或拉長。
- 若桿件受壓，則應變稱為**壓應變(compressive strain)**。
- 材料長度會縮短。通常我們會把拉應變視為正，而壓應變為負。上述的應變與正向應力有關，因此稱為**正向應變(normal strain)**。

正向應變

- 正向應變就是兩項長度的比，為無因次量 (**dimensionless quantity**)，指的是無單位。

單軸應力與單軸應變

正向應力和正向應變是根據純粹的靜力學和幾何考量，指的是式(1-1)與式(1-2)都能運用在任何材料及載重大小上，主要條件是

- 整個桿件的變形必須均勻，當然桿件必須是等截面，而且作用於橫截面形心，及
- 材料為**均質(homogeneous)** (也就是桿件要完全相同)。
- 最後的應力和應變就稱為**單軸應力(uniaxial stress)** 和**單軸應變(uniaxial strain)**。

均佈應力的軸向力作用線

- 考慮一任意形狀的等橫截面受到一軸力 P 作用，造成均佈的正向應力 σ (圖1-4a)，同時令 $p1$ 代表力作用線交於橫截面上的一點(圖1-4b)
- P 力的力距為 $M_x = -P\bar{y}$ $M_y = -P\bar{x}$ (1-3a,b)

$$M_x = \int \sigma y dA \quad M_y = -\int \sigma x dA \quad (1-3c,d)$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad (1-4a,b)$$

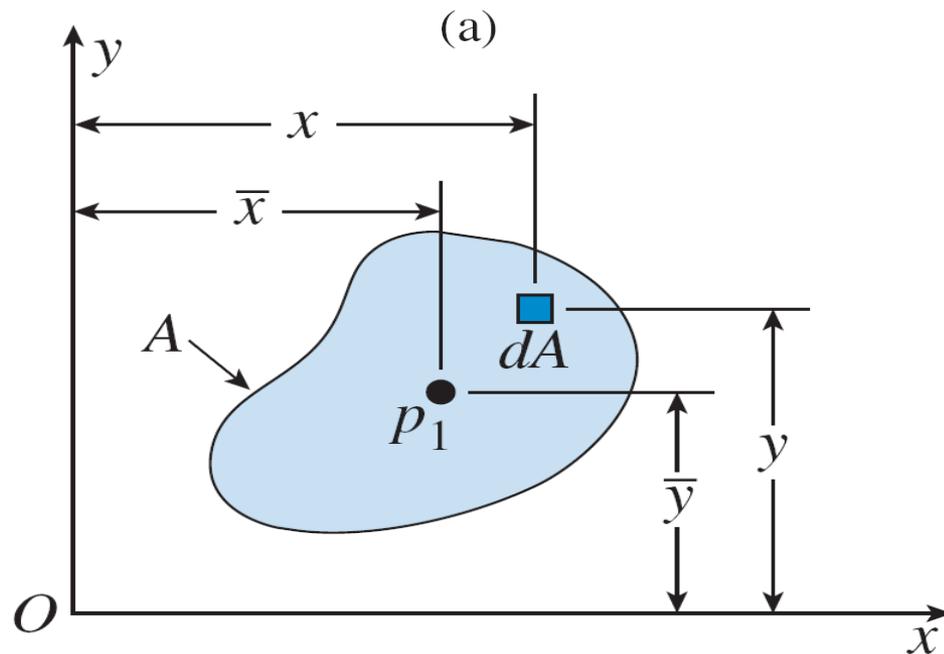
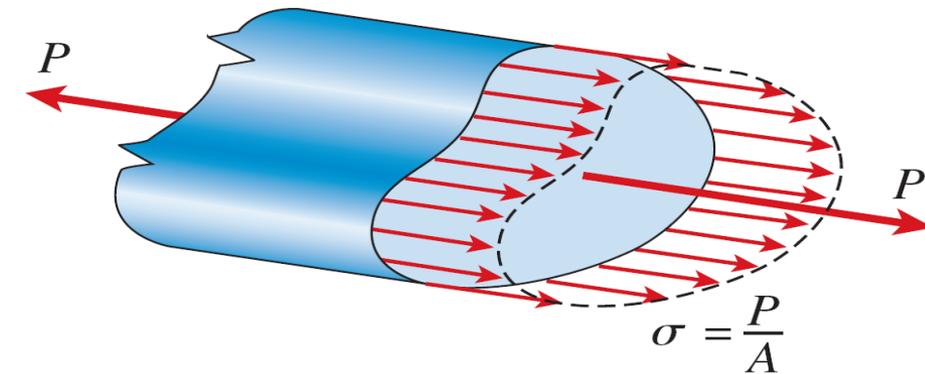


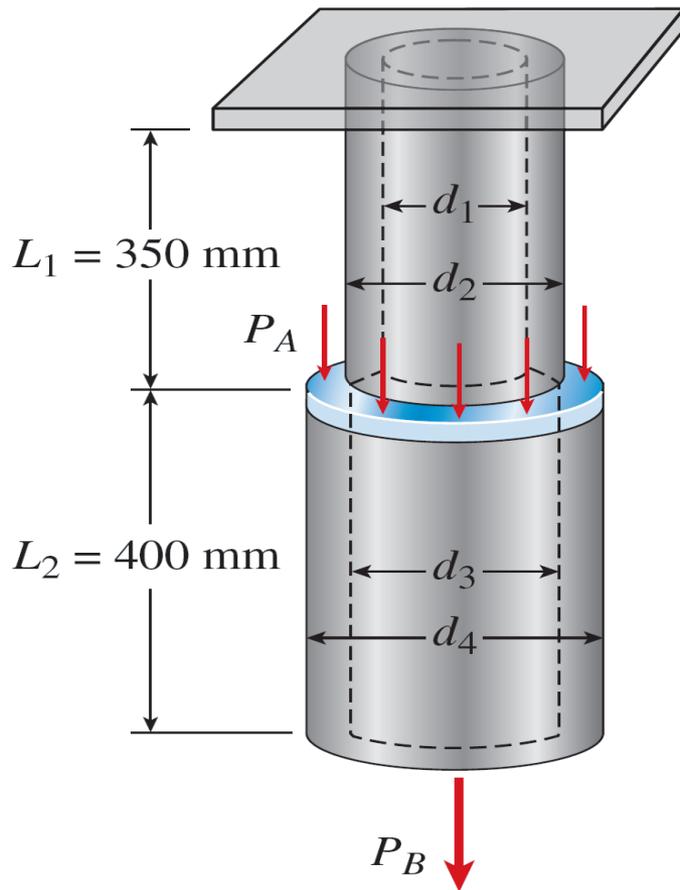
圖1-4
均佈在等截桿上的應力：
(a) 軸向力 P ；及
(b) 桿件的橫截面

例題1-1

一中空圓形尼龍管(見圖1-5)支撐一載重 $P_A = 7800 \text{ N}$ ，載重均勻分佈於下端管頂的蓋板上，第二載重則施加於管底。上、下管的內、外徑分別為： $d_1 = 51\text{mm}$ ， $d_2 = 60\text{mm}$ ， $d_3 = 57\text{mm}$ ， $d_4 = 63\text{mm}$ 。上管長度為 $L_1 = 350 \text{ mm}$ ，下管長度為 $L_2 = 400\text{mm}$ 。不計管重。

- (a) 求 P_B ，使上段拉應力為 14.5 MPa ，此時下段的應力和是多少？
- (b) 若 P_A 不變，求新的 P_B 值，使上、下段的拉應力相等。
- (c) 若下部管段的伸長量已知為 3.56 mm ，而且管底的向下位移為 7.63mm ，求(b)處，上、下管段的拉應變。

例題1-1



數值資料：

$$d_3 = 57 \text{ mm}, d_4 = 63 \text{ mm},$$

$$d_1 = 51 \text{ mm}, d_2 = 60 \text{ mm},$$

$$P_A = 7800 \text{ N},$$

$$L_1 = 350 \text{ mm},$$

$$L_2 = 400 \text{ mm}$$

圖1-5 例題1-1。
雙層吊管應力分析

解

(a) 利用提供的尺寸，計算上、下管段的橫截面積 ($A_1 = 1.39 A_2$)。已知 1 段的應力為 14.5 MPa，

$$A_1 = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) = 784.613 \text{ mm}^2 \quad A_2 = \frac{\pi}{4} (d_4^2 - d_3^2) = 565.487 \text{ mm}^2$$

上管段的軸向拉力為載重 P_A 與 P_B 的和，利用這兩項載重，寫下 σ_1 的表示式，解 P_B ：

$$\sigma_1 = \frac{P_A + P_B}{A_1}$$

式中 $\sigma_1 = 14.5 \text{ MPa}$ 所以 $P_B = \sigma_1 A_1 - P_A = 3577 \text{ N}$ 

既然 P_B 已知，則下管段的軸向拉應力為

$$\sigma_2 = \frac{P_B}{A_2} = 6.33 \text{ MPa} \quad \text{←}$$

(b) 所以 $P_A = 7800 \text{ N}$ ，寫下上、下管段的正向應力表示式，並令其相等，則可解得 P_B 。上管段的正向應力為：

$$\sigma_1 = \frac{P_A + P_B}{A_1}$$

下管段的正向應力為：

$$\sigma_2 = \frac{P_B}{A_2}$$

令 σ_1 與 σ_2 的應力表示式相等，求出所需的 P_B ：

$$P_B = \frac{\frac{P_A}{A_1}}{\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right)} = 20,129 \text{ N}$$

所以，上、下管段的應力相等，新的 P_B 值為 P_A 值的 2.58 倍。

(c) 上管段的伸長量為 $\delta_1 = 3.56 \text{ mm}$ ，故上管段的拉應變為

$$\epsilon_1 = \frac{\delta_1}{L_1} = 1.017 \times 10^{-2}$$



管底的向下位移為 $\delta = 7.63 \text{ mm}$ ，所以下管段的淨伸長量為 $\delta_2 = \delta - \delta_1 = 4.07 \text{ mm}$ ，而下管段的拉應變為：

$$\epsilon_2 = \frac{\delta_2}{L_2} = 1.017 \times 10^{-2}$$

註：正如前面解釋過，應變沒有單位，為了加深印象，本例的應變 ϵ_1 可以寫成 $1017 \times 10^{-6} \text{ m/m}$ 或 $1017 \text{ } \mu\text{m/m}$ 。

1.3 材料的機械性質

MECHANICAL PROPERTIES OF MATERIALS

- 機械與結構的設計要達到正常運作，須先了解目前所使用的材料之**機械行為(mechanical behavior)**
- 典型的**拉力試驗機(tensile-test machine)**示於圖1-6，將試體放在試驗機的兩片大夾頭(grips)中間，然後施加拉力。
- **拉力試驗試體(tensile-test specimen)**示於圖1-7，圓形試體的兩端放大，剛好可以裝入夾頭上，才不會造成夾頭周圍處破壞。

1.3 材料的機械性質

MECHANICAL PROPERTIES OF MATERIALS

- 附在試驗體左側的兩臂裝置就是承受載重時，測量伸長長度的伸長計(**extensometer**)
- 根據ASTM 標準
 1. 拉伸試體的直徑為12.8mm。
 2. 標計(gage marks)間的標距長度(gage length)則為50.8mm。
- 對**靜態試驗(static test)**來說，因不影響到試體的行為，所以可慢慢加大載重。但是在**動態試驗(dynamic test)**中，加載迅速，而且有時為週期性載重；由於動力載重影響材料性質，載重速率必須量測。

1.3 材料的機械性質

MECHANICAL PROPERTIES OF MATERIALS

- 金屬製品的**壓力試驗(compression tests)** 通常是製成立方體或圓柱體的試體。例如，立方體每邊長為50 mm，而圓柱直徑為25mm，長為25 至300 mm。兩者的載重皆以試驗機進行，即可測量出試體縮短的長度。



圖1-6 拉力試驗機和自動資料處理系統(MTS 系統公司提供)



圖1-7
典型的拉力試體，附有伸長計；
進行拉力試驗時，試體出現斷裂
(MTS 系統公司提供)

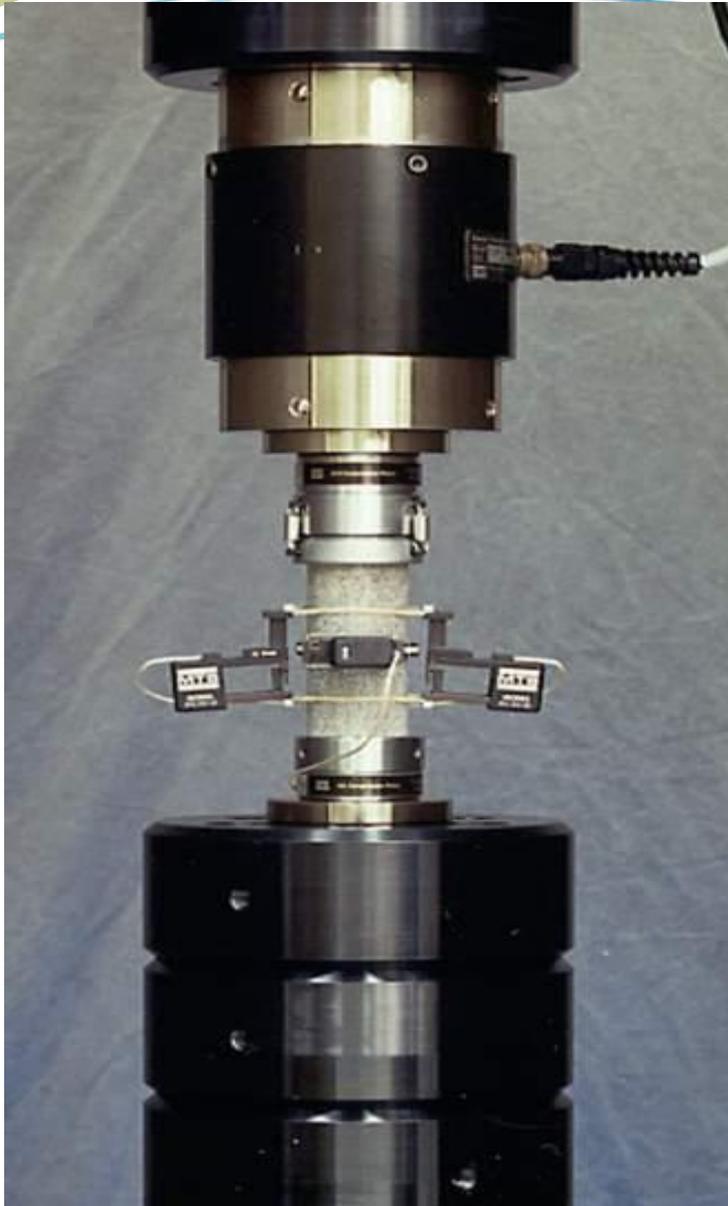


圖1-8
岩石的壓縮試驗，以得到壓力
強度、彈性模數及波生比(MTS
系統公司提供)

應力-應變圖

- 當我們用試體的原始面積(initial area) 來計算時，則
- 此應力稱為**標稱應力(nominal stress)**又稱為**傳統應力(conventional stress)**及**工程應力(engineering stress)**
- 更精確的軸向應力值稱為**真應力(true stress)**
- 試體的軸向應變(axial strain) 平均值為伸長量除標距長度 L (見圖1-7 和式(1-2))。若我們用原始標距長度(initial gage length) (設為50 mm) 來計算，則可得到**標稱應變(nominal strain)**
- 由於承受拉力載重時，兩標計的距離也會隨之增加，因此，計算其實際距離的載重，則可得**真應變(true strain)**，又稱為**自然應變(natural strain)**。

應力-應變圖

- 應力-應變圖(stress-strain diagram)對每一種試驗的材料都有其特性，並傳達相關材料的機械性質及行為模式。
- 結構鋼(structural steel) steel)，又稱軟鋼(mild steel) 或低碳鋼(low-carbon steel)。
- 圖1-9的開始為原點O 至A 點的一直線，指應力-應變關係的初段不僅呈線性(linear)，同時也呈比例(proportional)。**通過A 點之後，應力-應變的比例關係不再存在；因此，A 點應力稱為比例限度(proportional limit)
- 由O 至A 點的直線斜率稱為彈性模數(modulus of elasticity)

應力-應變圖

- 當應力增加超出比例限度，應變的增加比應力的增加更快速。因此，應力-應變曲線的斜率越來越小，直至B點，曲線才會呈水平(圖1-9)。從這一點開始，伸長量顯著地增長，而力的增加卻顯得很小(B點至C點)。此現象即為材料的降伏(**yielding**)，B點為降伏點(**yield point**)，其相對的應力為鋼的降伏應力(**yield stress**)。
- *BC* 區段內(圖1-9)，材料為完全塑性(**perfectly plastic**)，表示在沒有載重增加下仍持續變形。

應力-應變圖

- *BC* 區段經過降伏，承受大量的應變之後，鋼開始**應變硬化(strain harden)**。
- 應力-應變圖的*C* 至*D* 點為正斜率。最後，載重達到最大值，相對的應力(*D* 點) 稱為**極限應力(ultimate stress)**。
- 材料的降伏應力和極限應力分別又稱為**降伏強度(yield strength)**和**極限強度(ultimate strength)**。
- **強度(strength)**是結構耐載重能力的總稱。

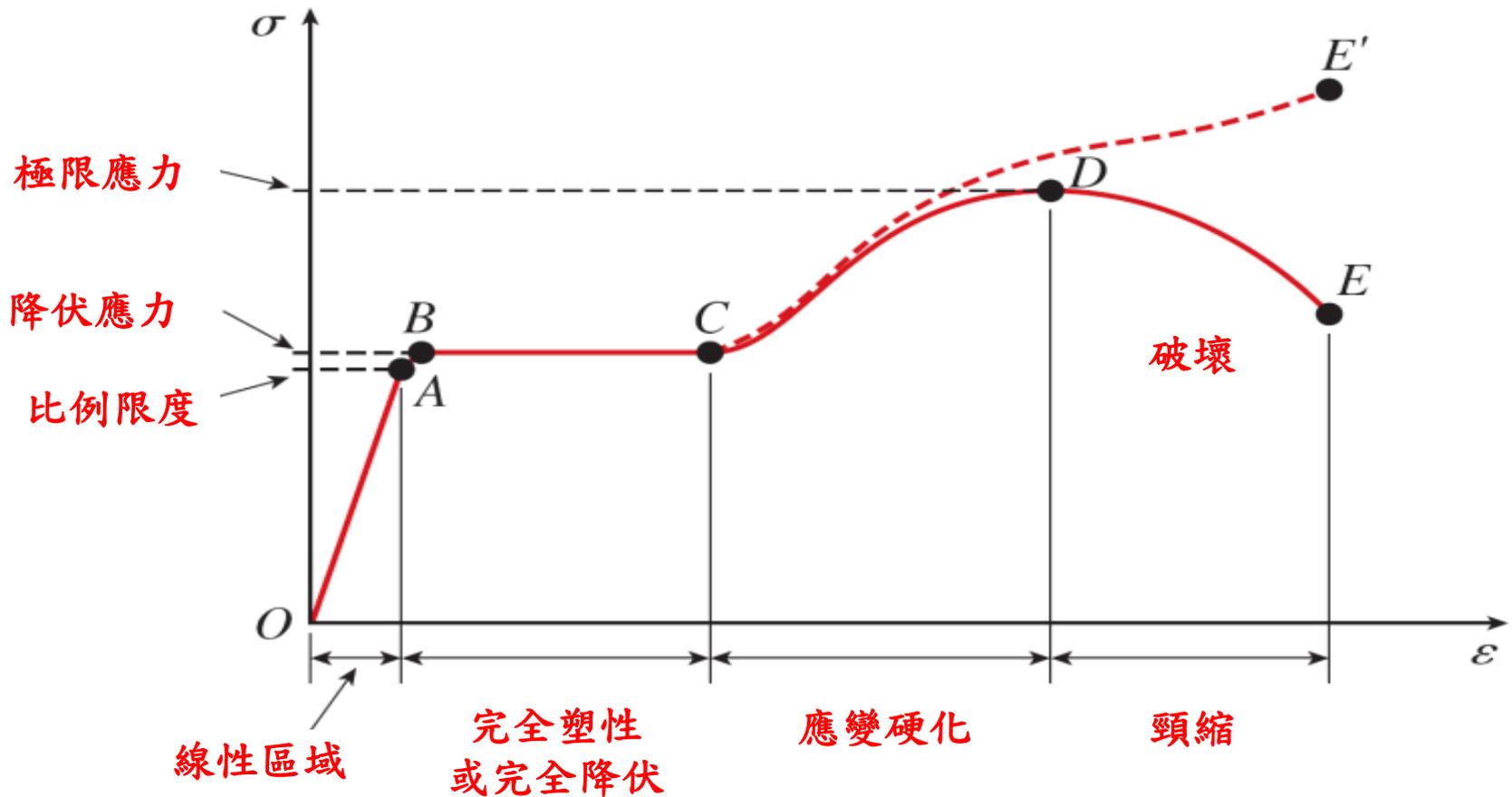
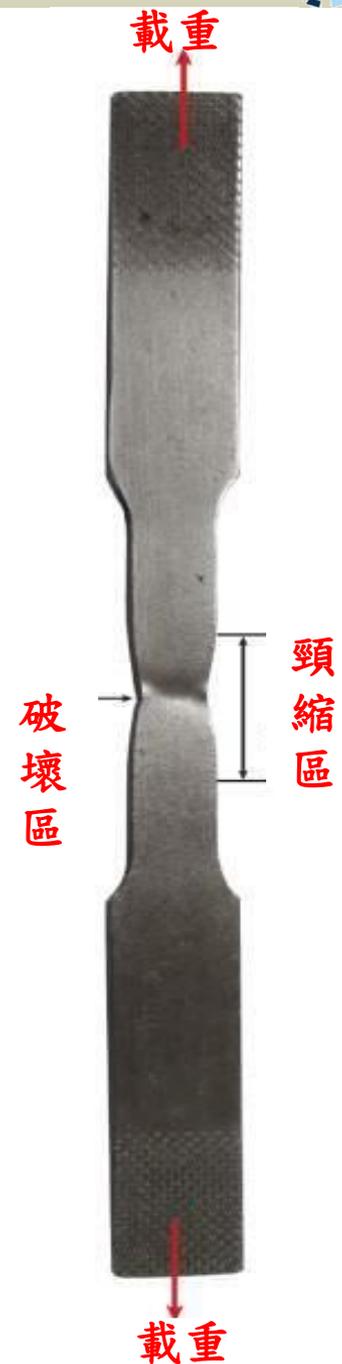


圖1-9 典型結構鋼受拉的應力-應變圖(未依比例標示)

- 當試體伸長，會產生側向收縮
(lateral contraction)
 - 極限應力的附近，桿件減少的 σ 已明顯可見，開始產生明顯的頸縮(necking) (見圖1-7和圖1-10)。
 - 如果以頸縮區的實際橫截面積 A 為應力，則可得真應力-應變曲線
(true stress-strain curve)
(圖1-9 的虛線 CE')
- 圖1-10 軟鋼桿受拉後的頸縮



- 以試體的原始橫截面積為依據的**傳統應力-應變曲線(conventional stress-strain curve)** OABCDE 能輕鬆求得，並提供令人滿意的工程設計資訊。
- 如結構鋼的金屬在達到損壞之前，承受大量的永久應變，則歸類為**延性(ductile)**。

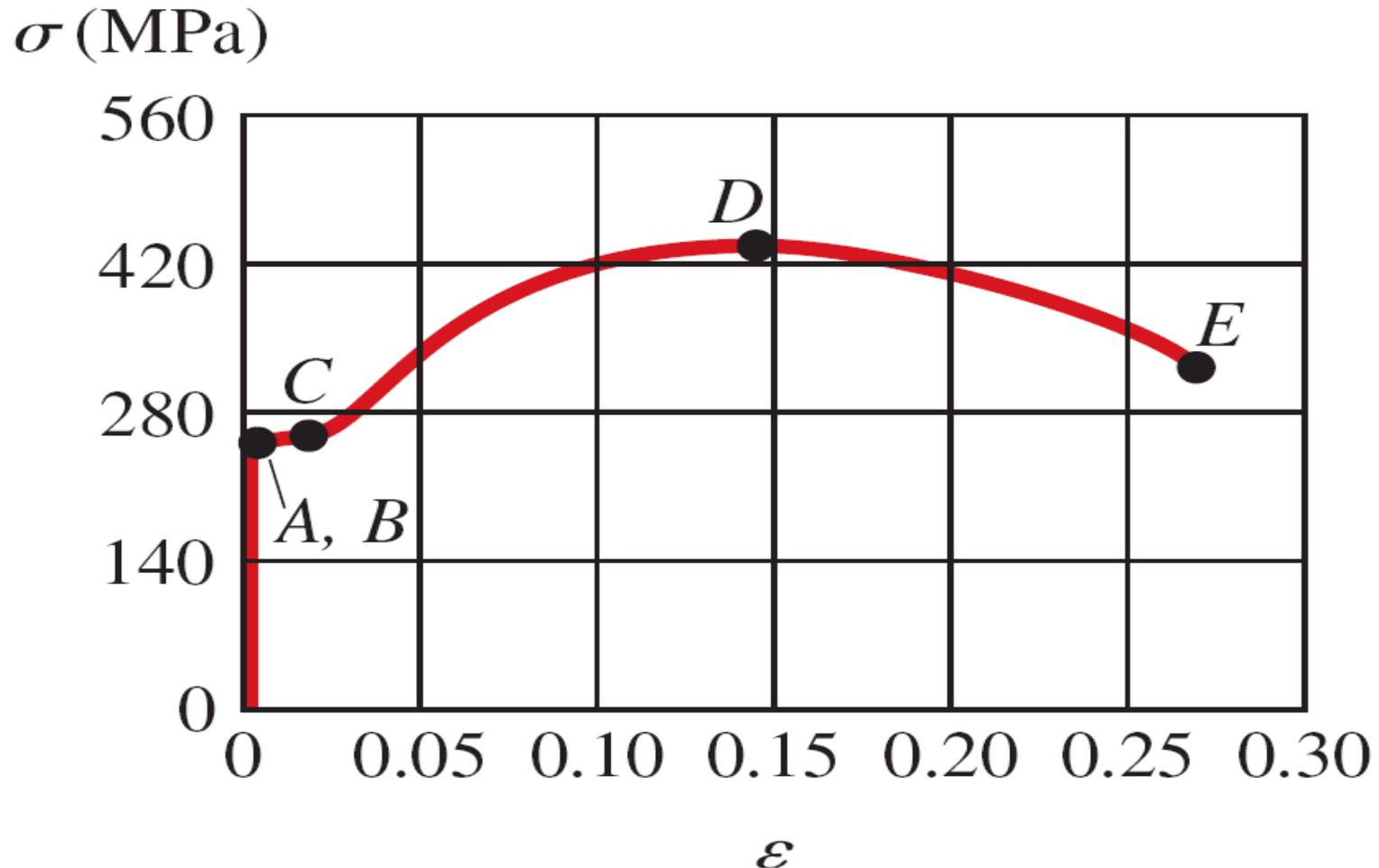


圖1-11 典型結構鋼受拉的應力-應變圖(依比例標示)

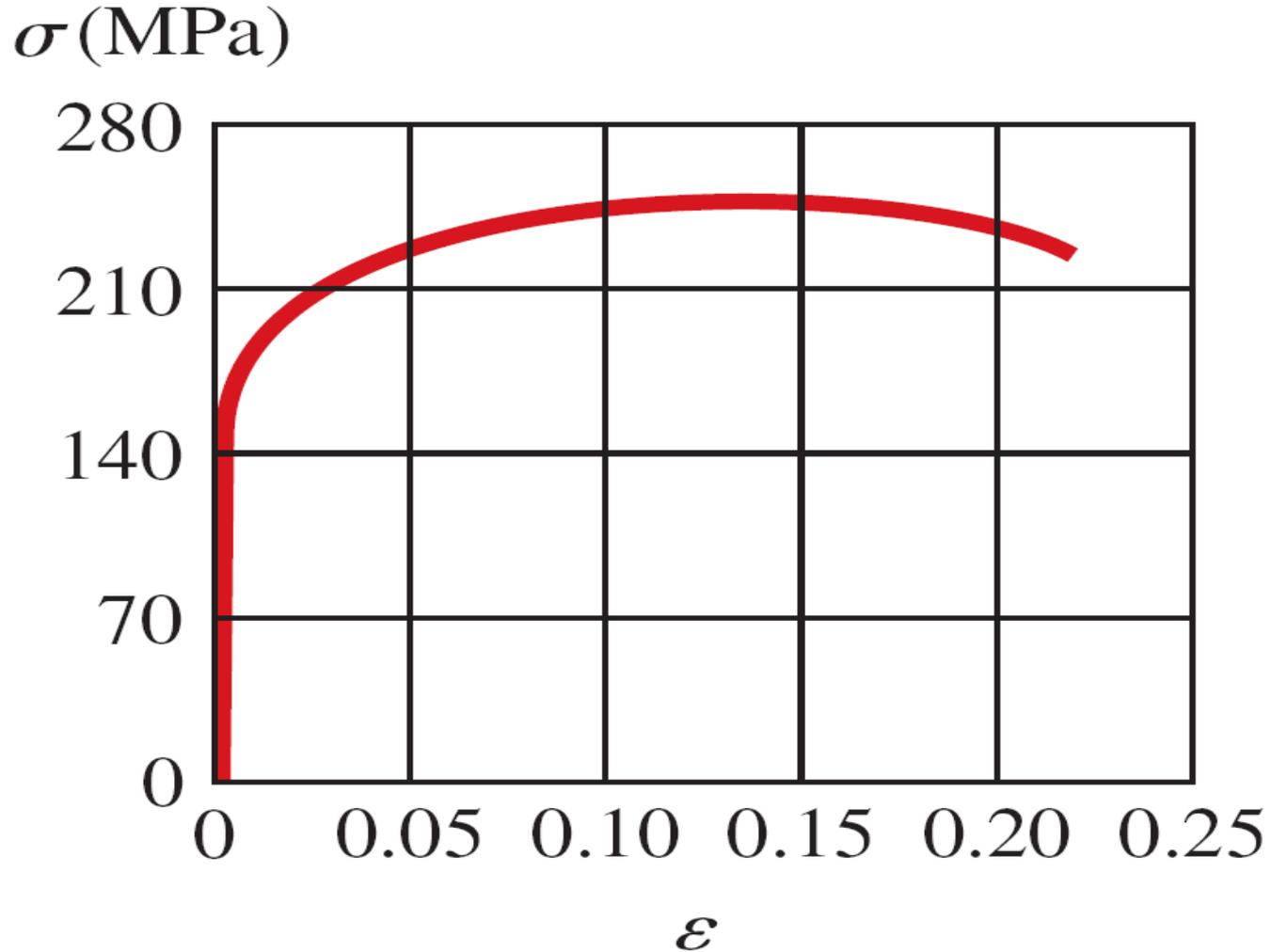


圖1-12 鋁合金典型的應力-應變圖

- 鋁合金(**aluminum alloys**)基本上並沒有明確定義的降伏點偏移法(offset method)
- 材料(如鋁)不會有明確的降伏點，而且在比例限度之後也未承受大的應變，我們可利用的降伏應力

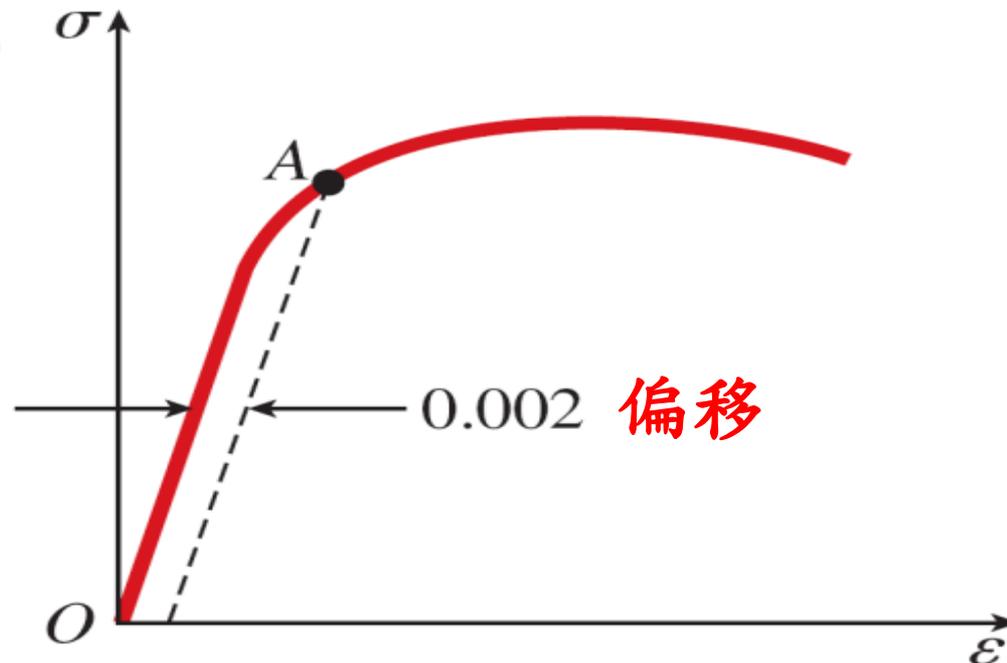


圖1-13 由偏移法求得的不定降伏應力

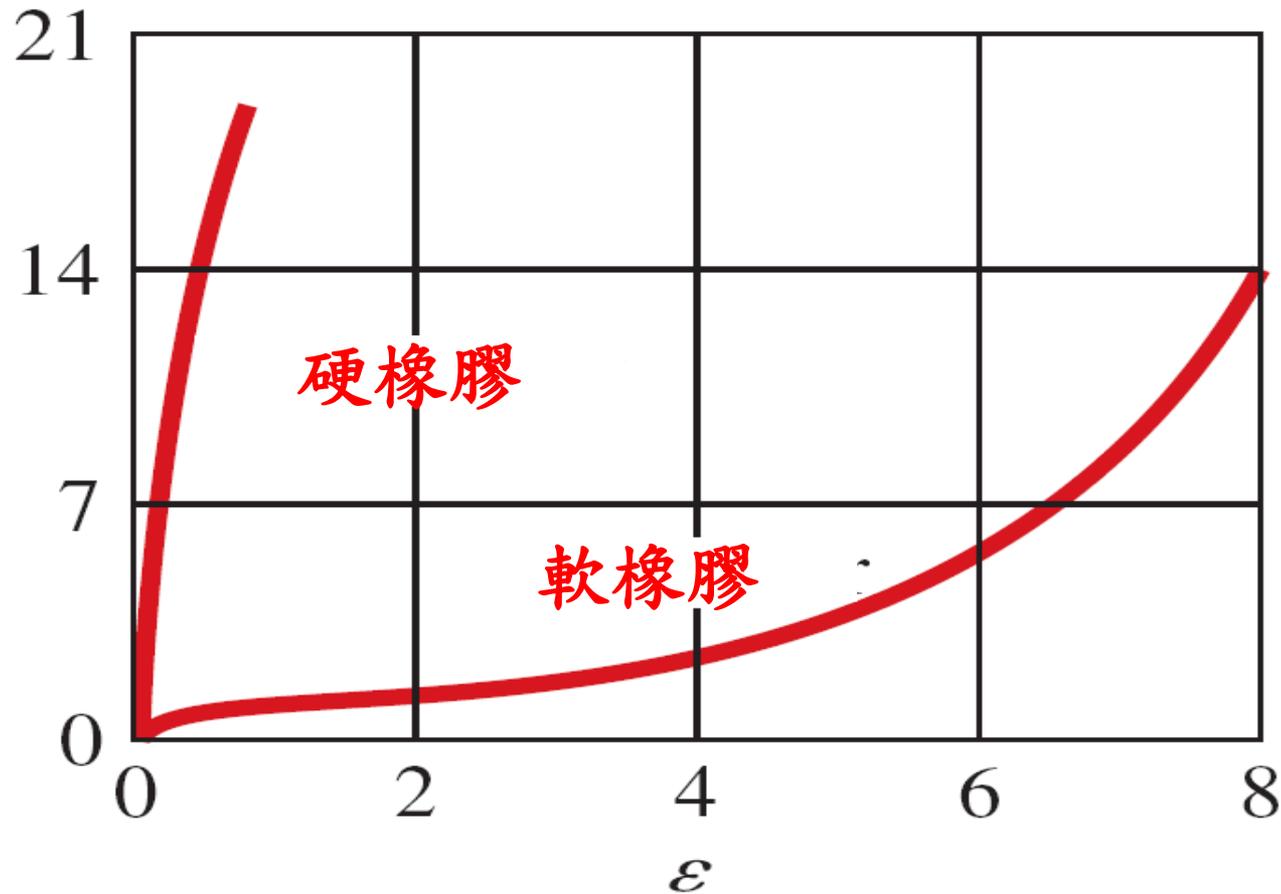
σ (MPa)

圖1-14 軟、硬橡膠受拉的應力-應變曲線

- 伸長百分比 (percent elongation)

$$\text{伸長百分比} = \frac{L_1 - L_0}{L_0} (100) \quad (1-5)$$

L_0 為原始標距長(original gage length)， L_1 為破壞時的標計間距。

- 面積收縮百分比 (percent reduction on area) $\frac{A_0 - A_1}{A_0} (100)$ (1-6)

脆性材料

- 以相當低的應變值即可破壞
- 的材料歸類為脆性(**brittle**)

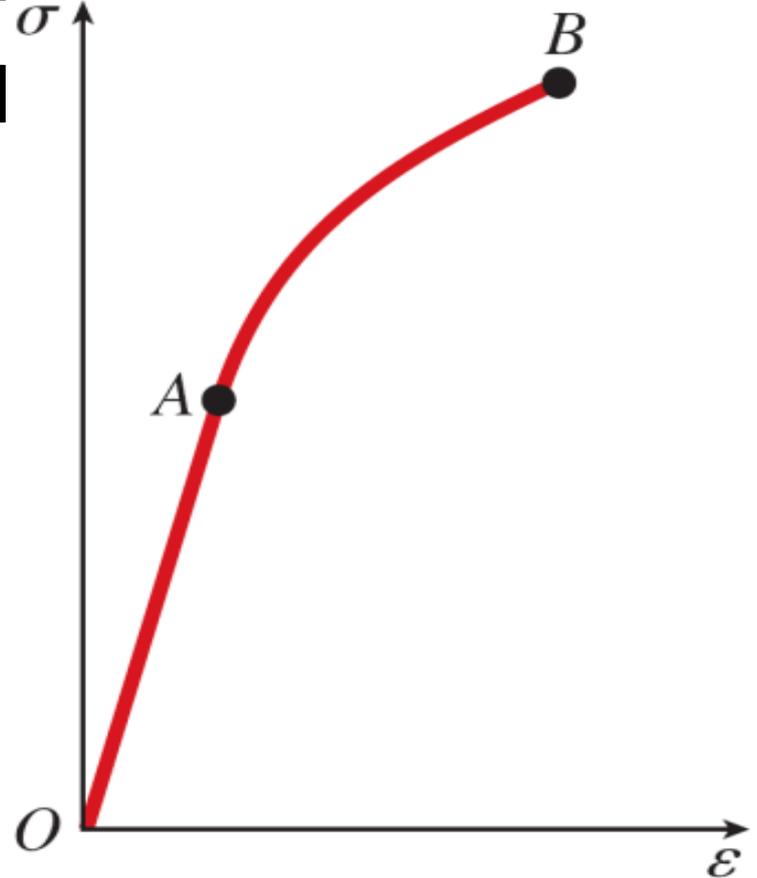


圖1-15

顯示比例限度(*A* 點)及破裂應力(*B* 點)的脆性材料典型應力-應變圖

- **玻璃纖維(glass fibers)**能產生巨大強度，並達到超過7 GPa的極限應力。
- **塑膠(plastics)**種類因重量輕、抗腐蝕及良好的電絕緣性質，
上。

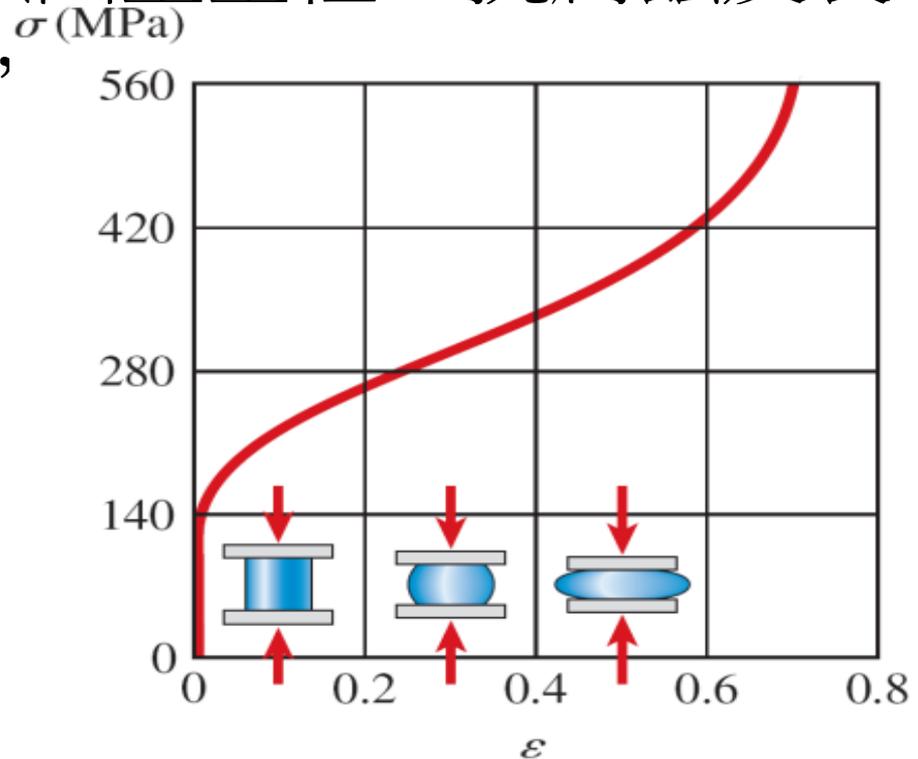


圖1-16
銅受壓時的應力-應
變圖

- 纖維強化材料(**filament-reinforced material**)

包括一基材，基材內埋有高強度纖維，最後的複合材料的強度遠大於基材強度。

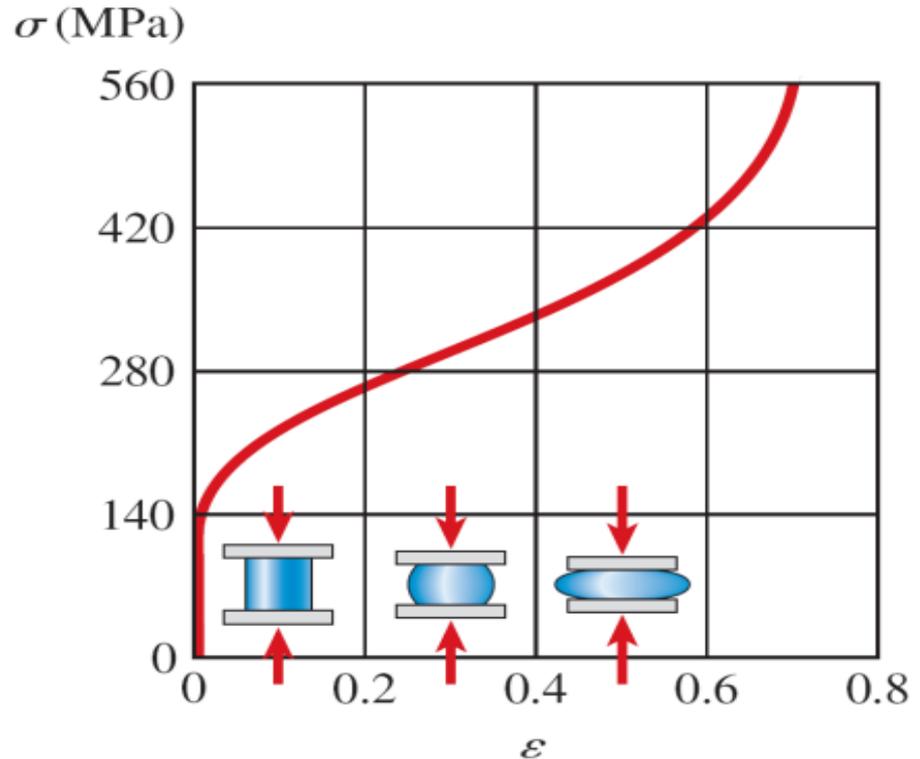


圖1-16
銅受壓時的應力-應
變圖

壓力

- 材料受壓或受拉的應力-應變曲線各不相同。
- 進行拉力試驗時，試體開始伸長，並可能出現頸縮，最後，出現破壞。
- 圖1-16的說明，此圖為銅受壓時的應力-應變圖。因為試體受壓力後的實際橫截面大於原始面積，所以，壓力試驗下的真應力小於標稱應力。
- 脆性材料不像延性材料在受壓時會出現壓平現象，而在最大載重時破裂。

機械性質表

- 材料性質列於附錄E 的表格內，其內的資料為典型材料，適用於解本書的習題。
- 因不同的製作程序、化學成分、內部缺陷、溫度及其他許多的因素，材料性質與應力-應變曲線的變化很大，即使為相同材料。
- 由附錄E 得到的資料不該應用於特定工程或設計用途上

1.4 彈性、塑性和潛變

ELASTICITY, PLASTICITY, AND CREEP

- 在卸載過程中，能夠回復到原始尺寸的材料性質稱為**彈性(elasticity)**
- (圖1-17b)。當達至C點時，載重已完全卸除，但材料仍存有**殘餘應變(residual strain)** 或永久應變(permanent strain)，並以OC線表示。
- 測試過之試體的長度大於加載前的長度，桿件的殘餘伸長稱為**永久變形(permanent set)**。
- 卸載期間中，部分桿件回復至原始形狀，則材料稱**部分彈性(partially elastic)**

1.4 彈性、塑性和潛變

ELASTICITY, PLASTICITY, AND CREEP

- 當材料受到大於彈性限度的非彈性應變 (inelastic strains) 作用時，此材料性質為**塑性(plasticity)**。
- 當延性材料在加載於塑性區段後有大的變形產生，我們說材料受到**塑性流(plastic flow)**。

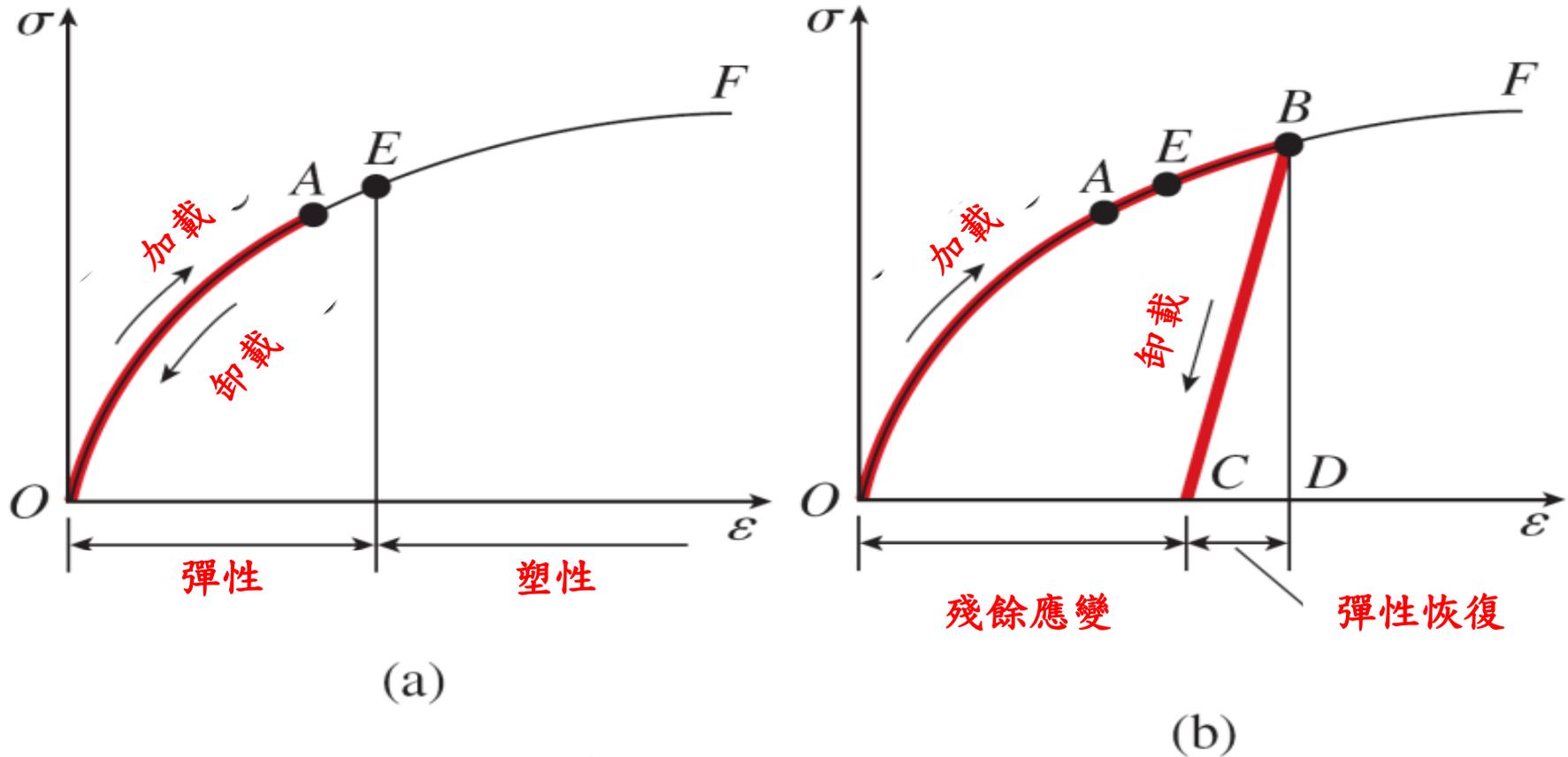


圖1-17 應力-應變圖說明：
 (a) 彈性行為；(b) 部分彈性行為

材料的重新加載

- 若材料維持在彈性範圍內，則在不明顯地改變其行為下，可以進行加載(loaded)、卸載(unloaded)及重新加載(reloaded)。

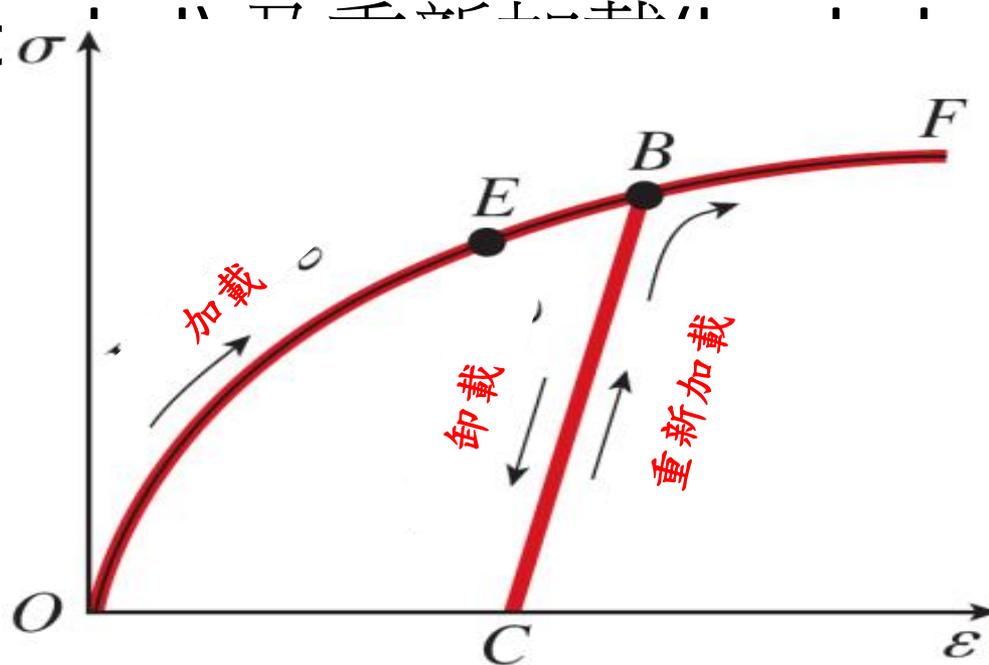


圖1-18 材料的重新加載以及彈性限度與比例限度的增加

潛變

- 一些材料延續長時間的加載後，產生額外的應變，稱為潛變 (Creep)

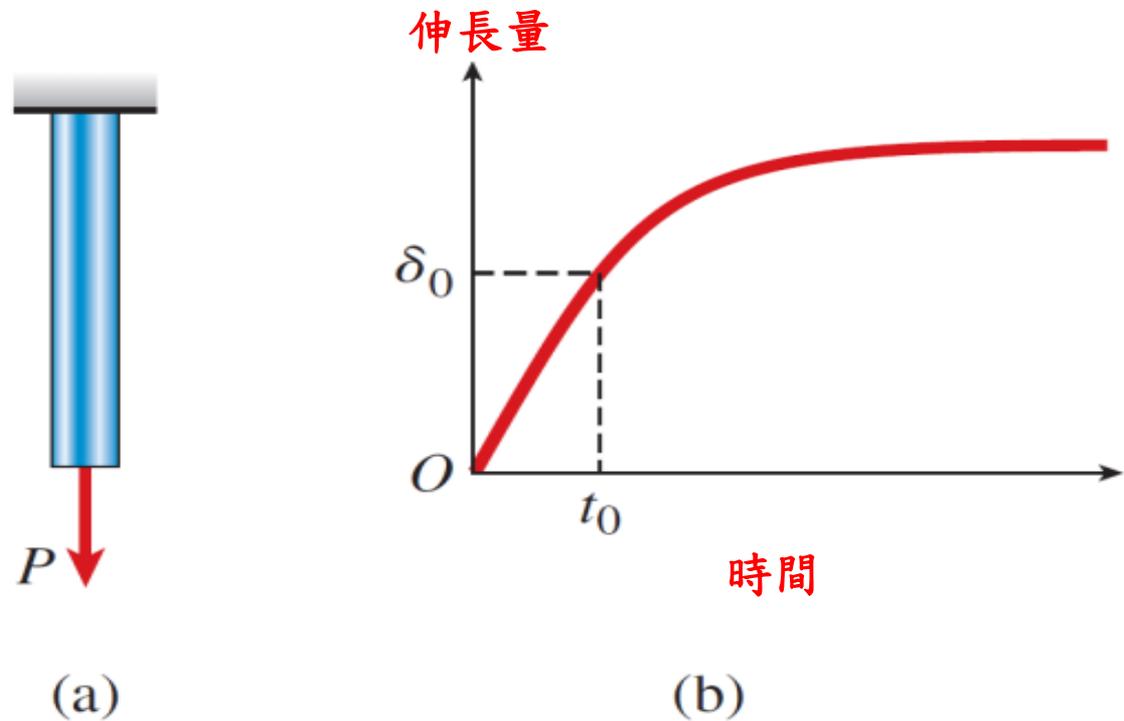


圖1-19 桿件在常數載重下的潛變

- 鬆弛(relaxation)



(a)

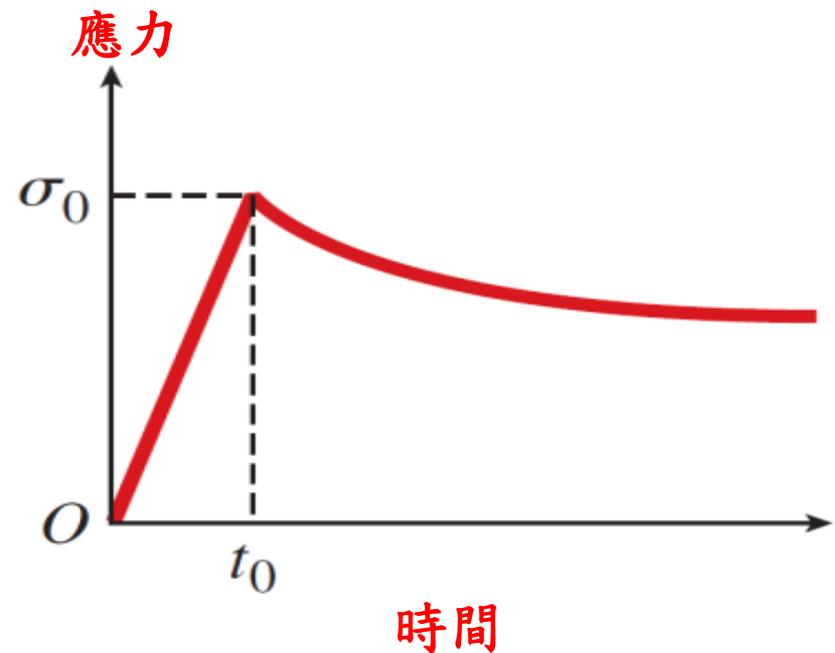


圖1-20
纜線受常數應變的應力鬆弛
(relaxation of stress)

例題1-2

一機械元件在 A 點沿水平桿滑動，並在 B 沿垂直槽移動， AB 桿可視為一剛性桿(長 $L = 1.5 \text{ m}$ ，重 $W = 4.5 \text{ kN}$) 在 A 、 B 點為滾平面支撐。不用時，機械元件由單一線(直徑 $d = 3.5 \text{ mm}$) 支撐，其一端接於 A ，而另一端則支於 B (參考圖 1-21)。線材為銅合金，其應力-應變關係為

例題:

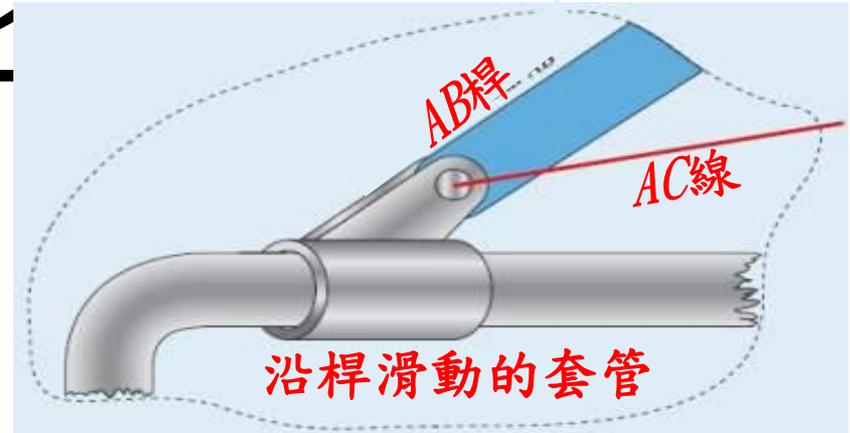
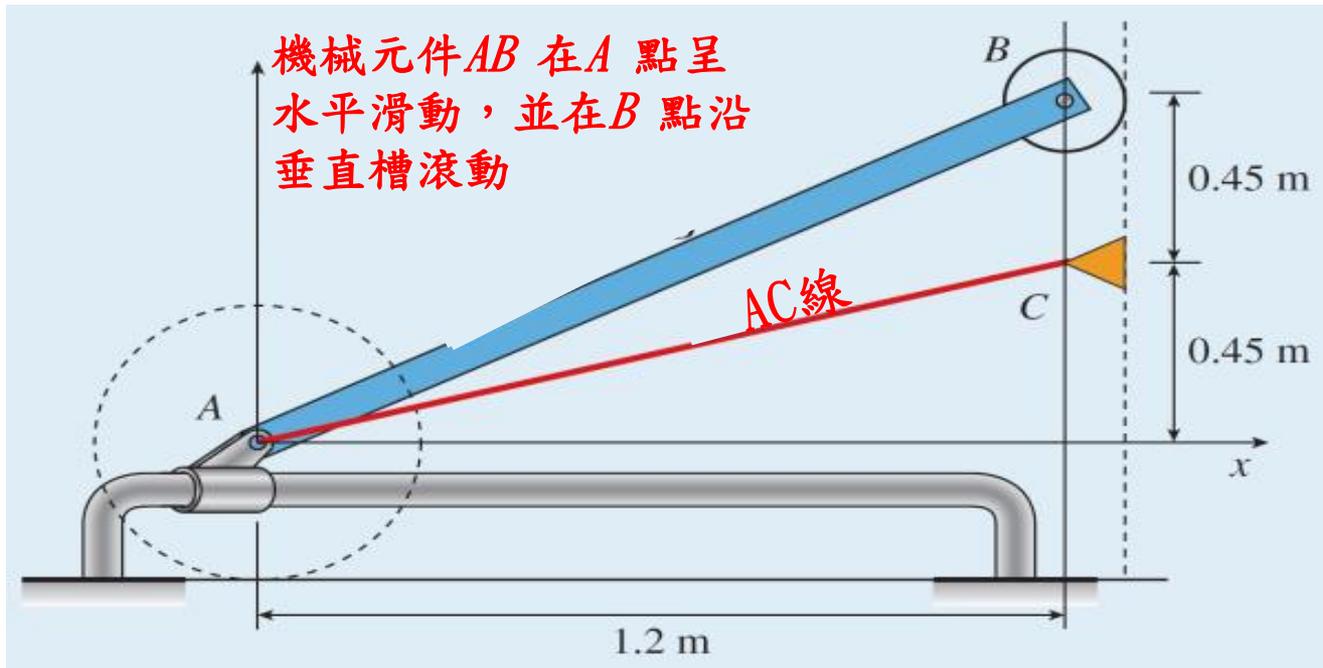


圖1-21 例題1-2。
剛性桿由銅合金線支撐



解

(a) 畫出應變在 0 到 0.03 之間的應力函數 $\sigma(\epsilon)$ (圖 1-22)。在應變 $\epsilon = 0.03$ 的應力為 454 MPa。

$$\sigma(\epsilon) = \frac{124,000\epsilon}{1+240\epsilon} \quad \epsilon = 0, 0.001, \dots, 0.03 \quad \sigma(0) = 0 \quad \sigma(0.03) = 454 \text{ MPa}$$

在應變 $\epsilon = 0$ 處的應力-應變曲線切線的斜率為彈性模數 E (參考圖 1-23)。取 $\sigma(\epsilon)$ 的導數，得到 $\sigma(\epsilon)$ 曲線的切線斜率，並算出在 $\epsilon = 0$ 的導數值，求 E 。

$$E(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} \sigma(\epsilon) \rightarrow \frac{124,000}{(240\epsilon + 1)^2} \quad \leftarrow$$

$$E = E(0) \quad E = 124,000 \text{ MPa} = 124 \text{ GPa}$$

其次求降伏應變 ϵ_y 的表示式，是 0.2% 外移線與應力-應變曲線交點 (參考圖 1-23)。將 ϵ_y 表示式代入 $\sigma(\epsilon)$ 表示式，解降伏應力 $\sigma(\epsilon_y) = \sigma_y$ ：

$$\epsilon_y = 0.002 + \frac{\sigma_y}{E} \quad \text{且} \quad \sigma(\epsilon_y) = \sigma_y \quad \text{或} \quad \sigma_y = \frac{124,000\epsilon_y}{1+240\epsilon_y}$$

整理上式，得到 σ_y 表示式為

$$\sigma_y^2 + \left(\frac{E}{500}\right)\sigma_y - \frac{E^2}{120,000} = 0$$

解得 0.2% 外移降伏應力 σ_y 的二次方程式，得到 $\sigma_y = 255 \text{ MPa}$ 。

降伏應變為：

$$\epsilon_y = 0.002 + \frac{\sigma_y}{E(\text{GPa})} = 4.056 \times 10^{-3}$$

例題1-2

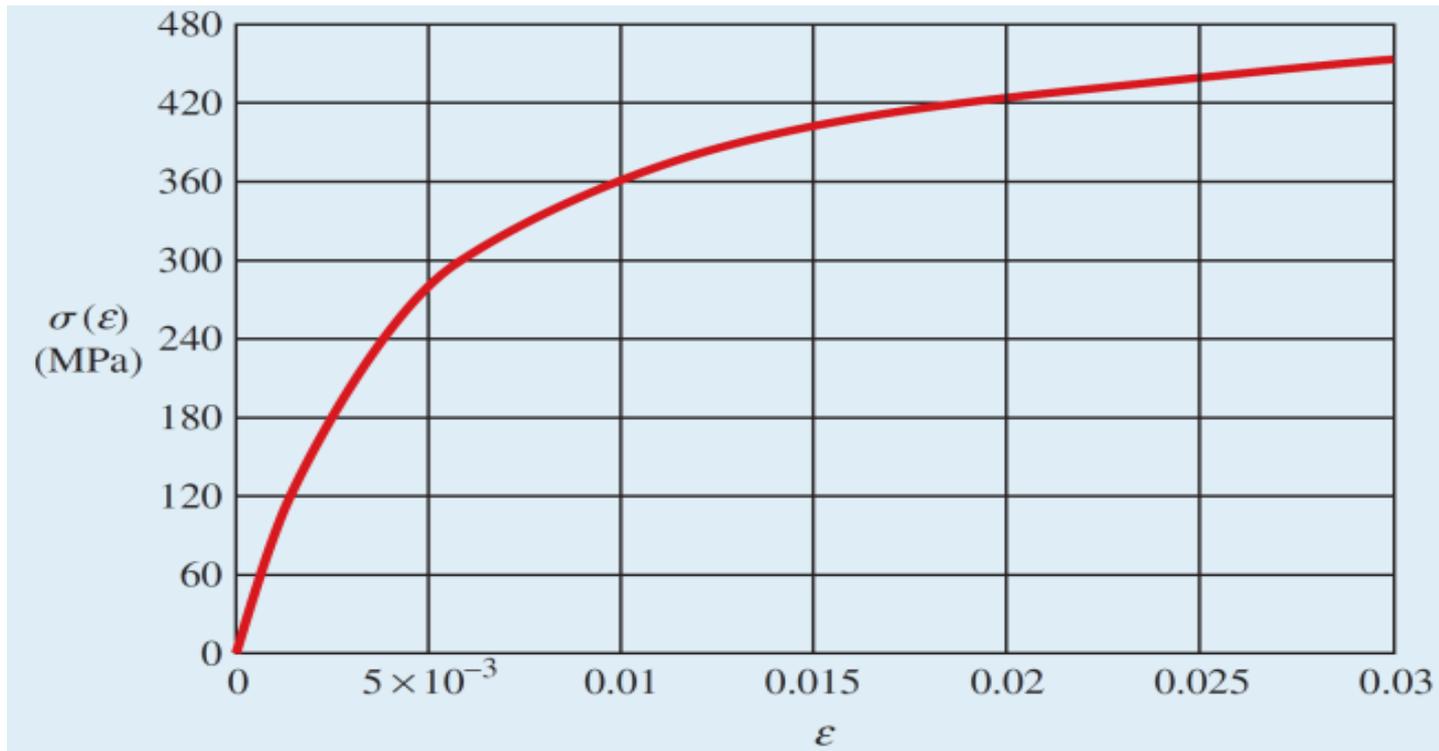


圖1-22 例題1-2。銅合金線的應力-應變曲線

(b) 利用靜力學求線的拉力 T (kN)，桿重為 $W=4.5$ kN。求纜線在 C 點與 x 軸的交角：

$$\alpha_c = \arctan\left(\frac{0.45}{1.2}\right) = 20.556^\circ$$

總和對 A 的力矩，得到一項未知的方程式。作用於左端的反力 B_x 為：

$$B_x = \frac{-W(0.6 \text{ m})}{0.9 \text{ m}} = -3 \text{ kN}$$

其次，總和在 x 向的力，得到線的力 T_C ：

$$T_C = \frac{-B_x}{\cos(\alpha_c)} T_C = 3.2 \text{ kN}$$



例題1-2

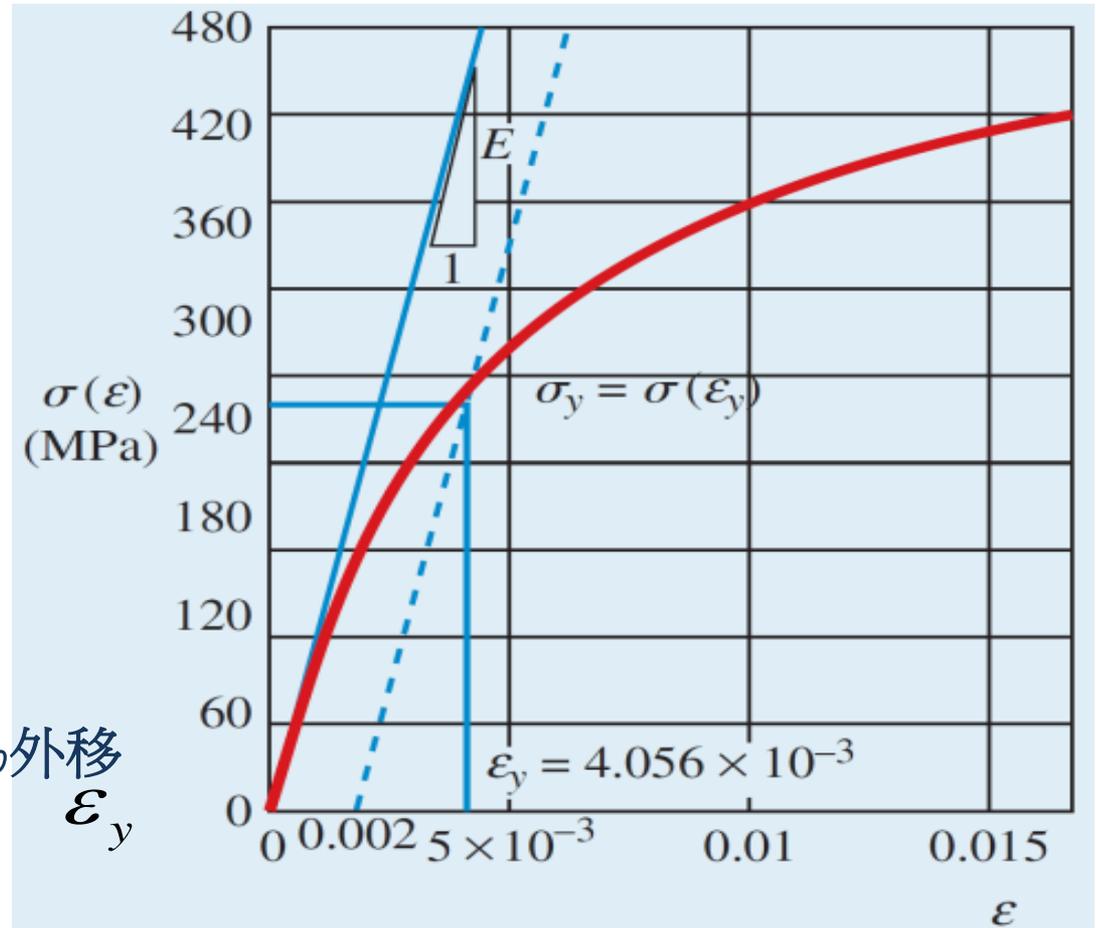


圖1-23 例題1-2。
銅合金線的彈性模數 E ，0.2%外移
線及降伏應力與應變

1.5 線性彈性、虎克定律和波生比

LINEAR ELASTICITY, HOOKE'S LAW, AND POISSON'S RATIO

- 當材料呈彈性行為，並建立應力-應變線性關係時，稱為**線性彈性(linearly elastic)**
- 虎克定律：又稱為彈性模數(modulus of elasticity) $\sigma = E\varepsilon$ (1-7)

桿件受單一拉力或單一壓力作用的應力-應變線性關係式為：

- 楊氏模數(Young's modulus)探討等截桿的受拉

波生比(Poisson's ratio)

- 當拉力加載於等截面桿，軸向伸長會伴隨著側向收縮(**lateral contraction**)
- 材料為線性彈性，桿件各點的側向應變(**lateral strain**) ϵ' 與同點的軸向應變 ϵ 呈比例。這些應變的比值，稱為波生比 (**Poisson's ratio**)。

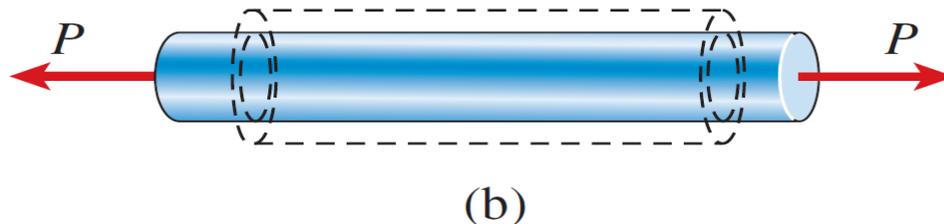


圖1-24 等截面桿在受拉下，產生軸向伸長和側向收縮：
(a) 加載前的桿件；(b) 加載後的桿件(桿件的變形為過度放大)

$$\nu = -\frac{\text{側向應變}}{\text{軸向應變}} = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (1-8)$$

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon \quad (1-9)$$

限制

- 材料必須是均質(homogeneous)。
- 材料必需是等向性(isotropic)。

例題1-3

一中空塑膠圓管(長 L ，內外徑分別為 d_1 、 d_2 ；
參考圖1-25)，插入一鑄鐵管(長 L_p ，內外徑分別為 d_3 、 d_4)中作為內襯。

(a) 試導出內部塑膠管所需長度 L_p 的公式，使得在受到壓力 P 作用下，兩管最後的長度為一致，而且同時塑膠管的最後外徑等於鑄鐵管的內徑。

(b) 利用所提供數值，求塑膠管的原始長度

例題1-3

數值資料及管橫截面性質：

$$L_c = 0.25\text{m} \quad E_c = 170 \text{ GPa} \quad E_p = 2.1 \text{ GPa} \quad \nu_c = 0.3 \quad \nu_p = 0.4$$

$$d_1 = 109.8 \text{ mm} \quad d_2 = 110 \text{ mm} \quad d_3 = 1102.2 \text{ mm}$$

$$d_4 = 115 \text{ mm} \quad t_p = \frac{d_2 - d_1}{2} = 0.1\text{mm}$$

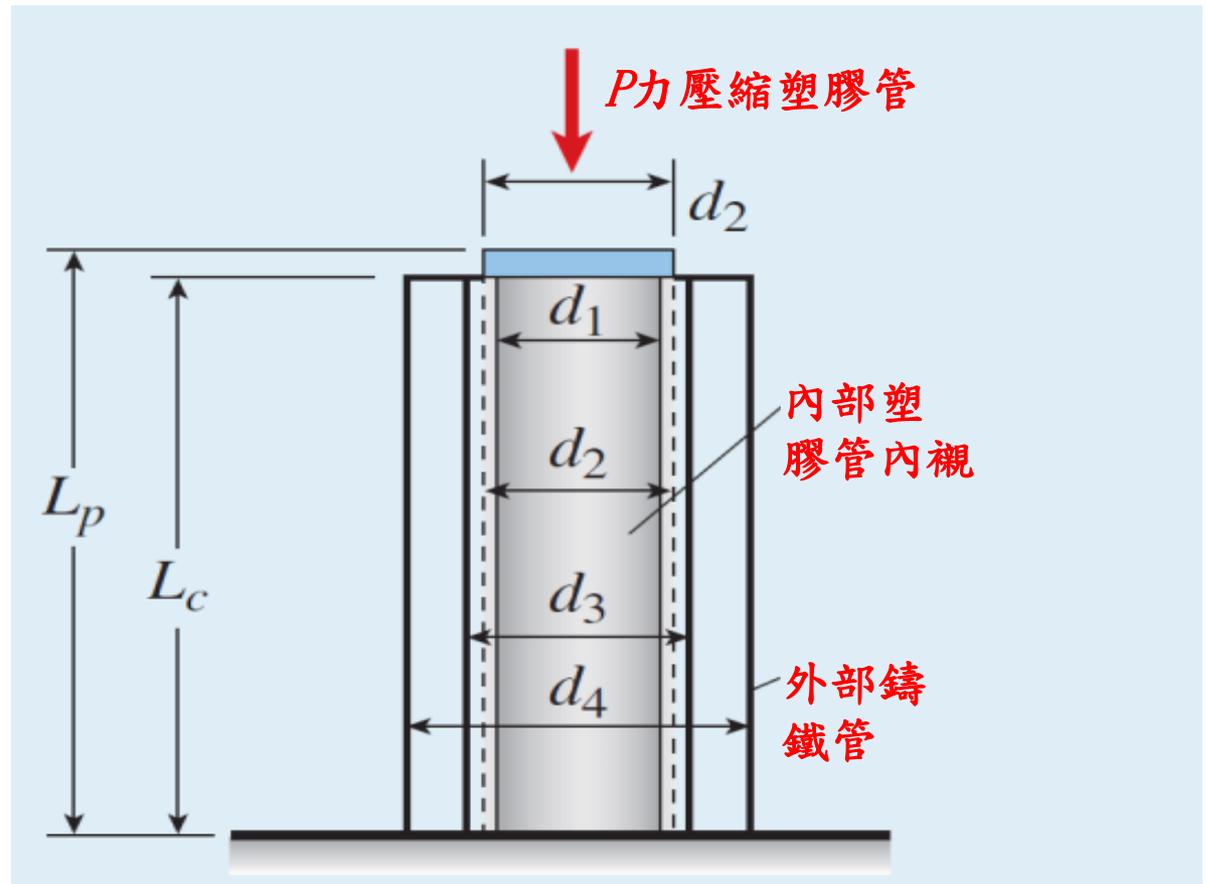
塑膠及鑄鐵管的原始橫截面積為

$$A_p = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) = 34.526\text{mm}^2$$

$$A_c = \frac{\pi}{4} (d_4^2 - d_3^2) = 848.984\text{mm}^2$$

例題1-3

圖1-25 例題1-3。壓入鑄鐵管的塑膠管



解

(a) 塑膠管因受壓而造成側向應變，必須閉合塑膠管與鑄鐵管間的隙縫為 $d_3 - d_2$ ，所需的側向伸長應變為正 (此處， $\epsilon_{\text{lat}} = \epsilon$)：

$$\epsilon_{\text{lat}} = \frac{d_3 - d_2}{d_2} = 1.818 \times 10^{-3}$$

伴隨的塑膠管壓應變，可利用式 (1-9) 得到，式中需要塑膠管的波生比，同時也需要側向應變：

$$\epsilon_p = \frac{-\epsilon_{\text{lat}}}{\nu_p} \quad \text{或} \quad \epsilon_p = \frac{-1}{\nu_p} \left(\frac{d_3 - d_2}{d_2} \right) = -4.545 \times 10^{-3}$$

現在可利用正向壓應變 ϵ_p ，求塑膠管的壓縮量，為

$$\delta_{p1} = \epsilon_p L_p$$

同時，所需塑膠管的壓縮量為

$$\delta_{p2} = -(L_p - L_c)$$

令 δ_{p1} 與 δ_{p2} 相等，得到所需塑膠管的原始長度 L_p 公式：

(續)

$$L_p = \frac{L_c}{1 + \epsilon_p} \quad \text{或} \quad L_p = \frac{L_c}{1 - \frac{d_3 - d_2}{\nu_p d_2}}$$

(b) 代入數值，求原始長度 L_p 、厚度變化 Δt_p 及塑膠管的最後厚度 t_{pf} 。
 L_p 如預估是大於鑄鐵管的長度 $L_c = 0.25$ m，而令受壓塑膠管的厚度增加了 Δt_p ：

$$L_p = \frac{L_c}{1 - \left(\frac{d_3 - d_2}{\nu_p d_2}\right)} = 0.25114 \text{ m}$$

$$\Delta t_p = \epsilon_{\text{lat}} t_p = 1.818 \times 10^{-4} \text{ mm} \quad \text{故} \quad t_{pf} = t_p + \Delta t_p = 0.10018 \text{ mm}$$

1.6 剪應力和剪應變

SHEAR STRESS AND STRAIN

- 剪應力(**shear stress**)此應力切於(*tangential*) 材料表面。
- 桿件和U形鉤在拉力載重作用下，以**支承方式(bearing)**



壓緊螺栓，這項接觸應力，稱為**支承應力(bearing stresses)**

高架人行道的對角斜撐 (diagonal bracing) 顯示雙剪 (double shear) 作用時的U形鉤及銷

- 平均支承應力
(average bearing stress) $\sigma_b = \frac{F_b}{A}$ 為總

1.6 剪應力和剪應變

SHEAR STRESS AND STRAIN

- 由螺栓的自由體圖mmpq (見圖1-26d)，可知剪力 V 作用於螺栓的切割表面。此特例中有兩組剪平面(mn 和pq)，所以，可說螺栓受到**雙剪(double shear)**作用雙剪(double shear)
- 受**單剪(single shear)**的螺栓接頭示於圖1-27a，金屬桿的軸向力 P 經過螺栓，傳遞至鋼柱翼板(flange)上。
- 圖1-26 和圖1-27 的載重安排顯示直接剪力 P.30-P.32

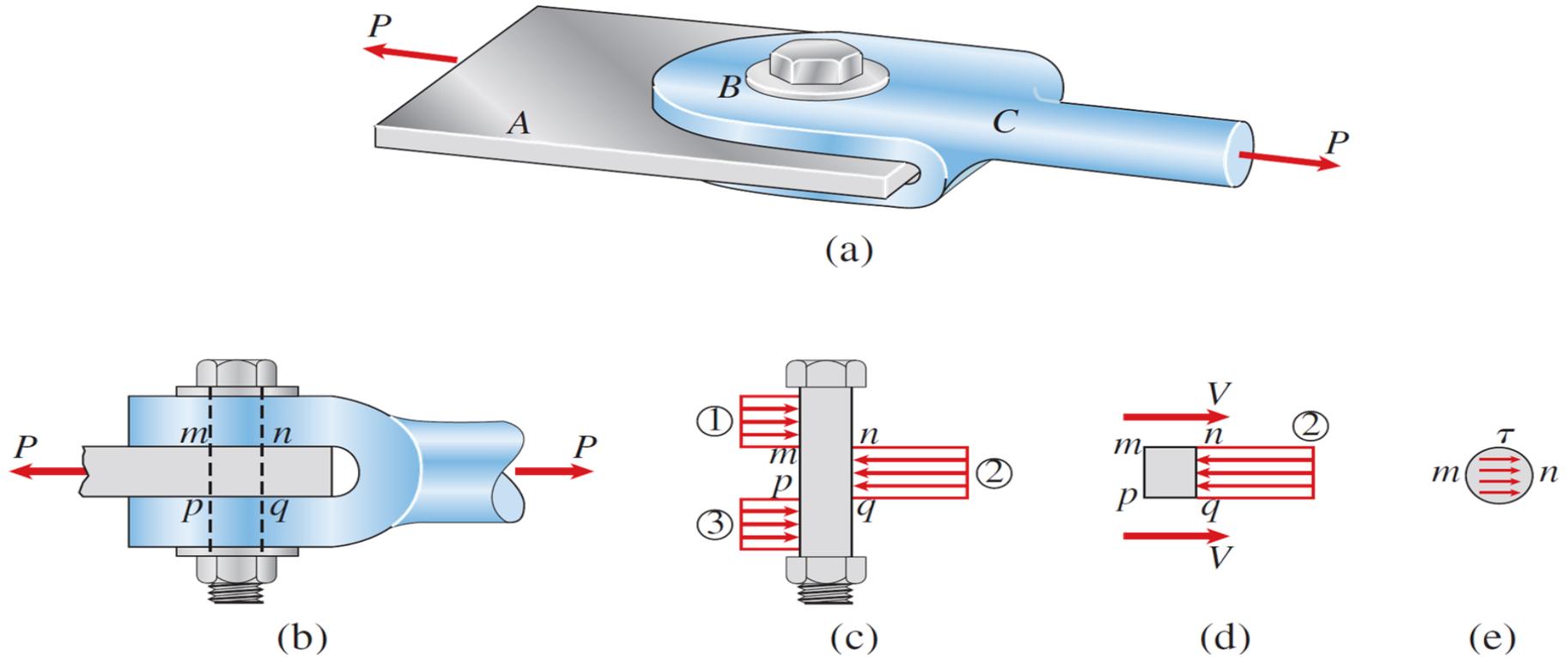
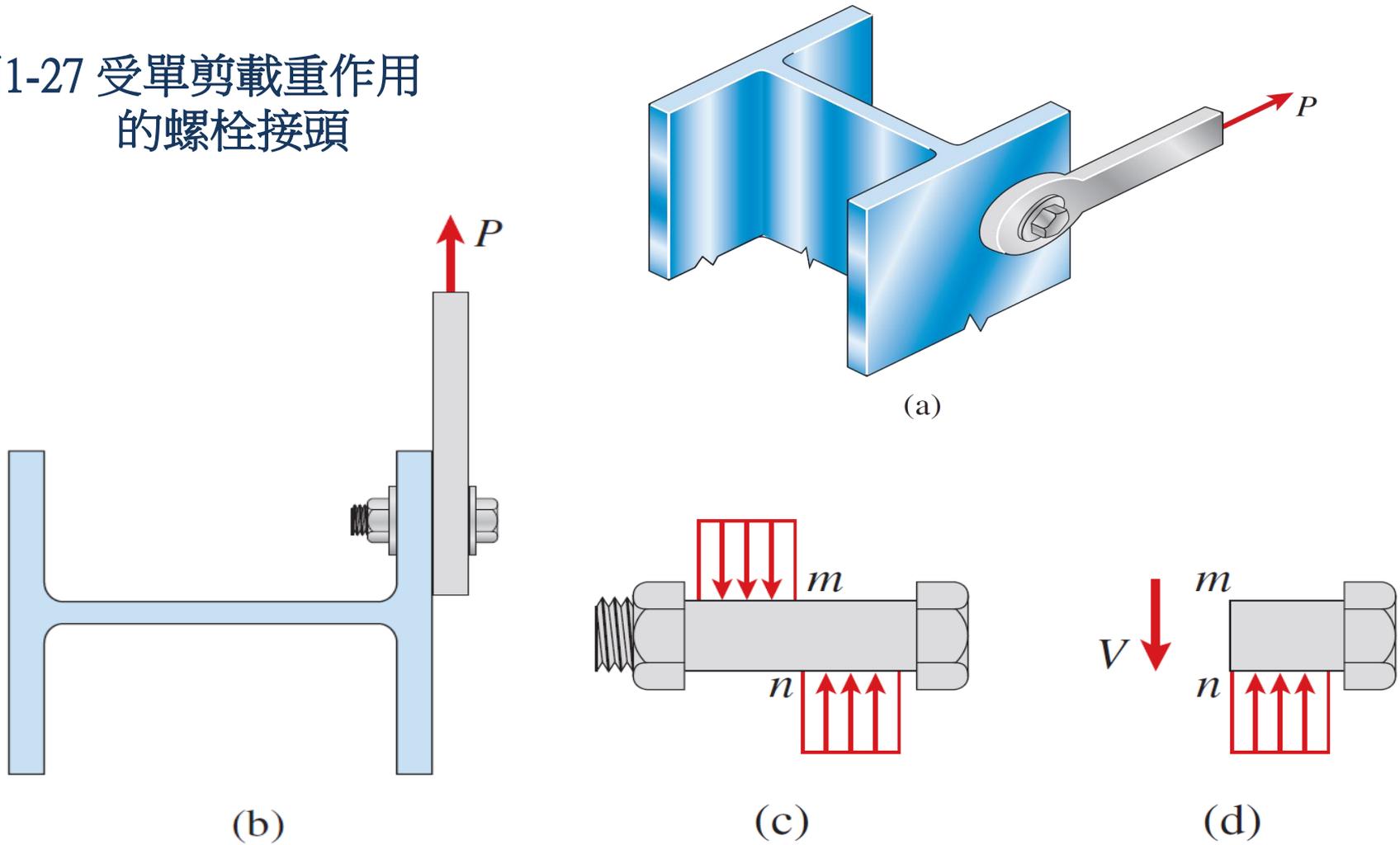


圖1-26 受雙剪力作用的螺栓接頭

圖1-27 受單剪載重作用的
的螺栓接頭



- 平均剪應力(average shear stress)：剪應力 V 除以作用橫截面積 A

$$\tau_{aver} = \frac{V}{A} \quad (1-11)$$

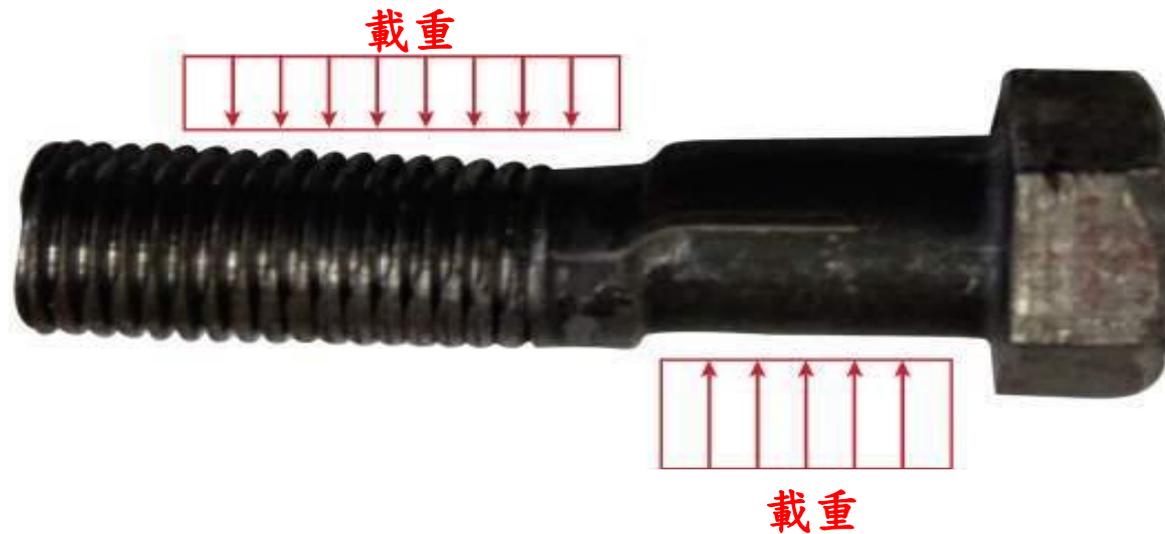


圖1-28 螺栓受單剪作用的損壞

垂直平面剪應力的等剪應力

- 頂、底面的應力標為 τ_2 ，可知相對的水平剪力為 $\tau_2 ac$ ，這些力產生順鐘向的偶矩 $\tau_2 abc$ 。由 z 軸的元素平衡可知， $\tau_1 abc$ 等於 $\tau_2 abc$ ，亦或
- $$\tau_1 = \tau_2 \quad (1-12)$$

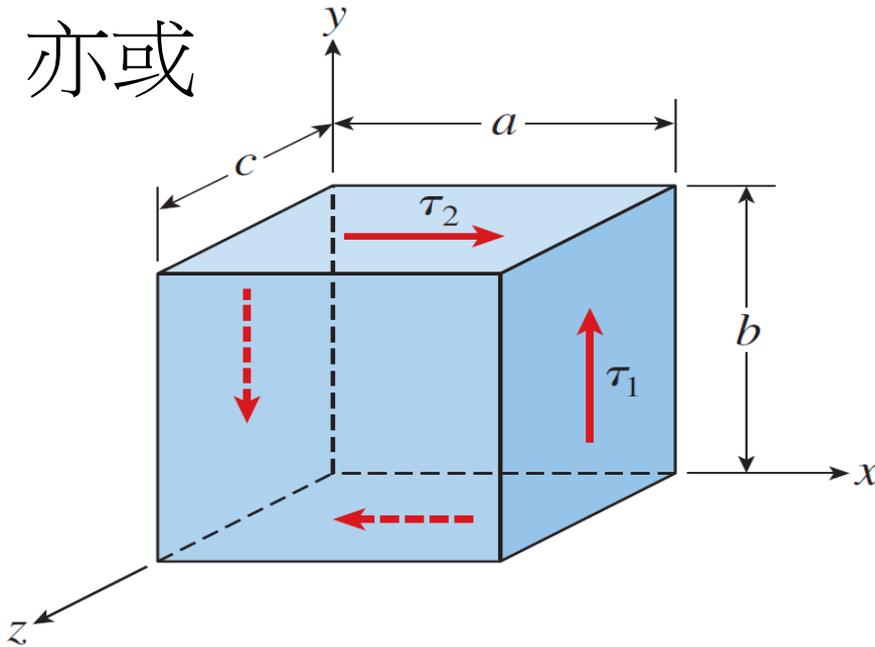


圖1-29
小材料元素受剪應力作用

垂直平面剪應力的等剪應力

- 下列作用於矩形元素剪應力的觀察結論：
 1. 元素相對面(平行面)的剪應力大小均相等，但作用方向相反。
 2. 元素鄰近面(垂直面)的剪應力大小均相等，且作用方向同為指向或指離面的交接線。

剪應變(shear strain)

- p 和 r 點的角度增大至 $\frac{\pi}{2} + \gamma$ 。
角是量測元素的**扭曲(distortion)**或形狀變化，稱為**剪應變(shear strain)**

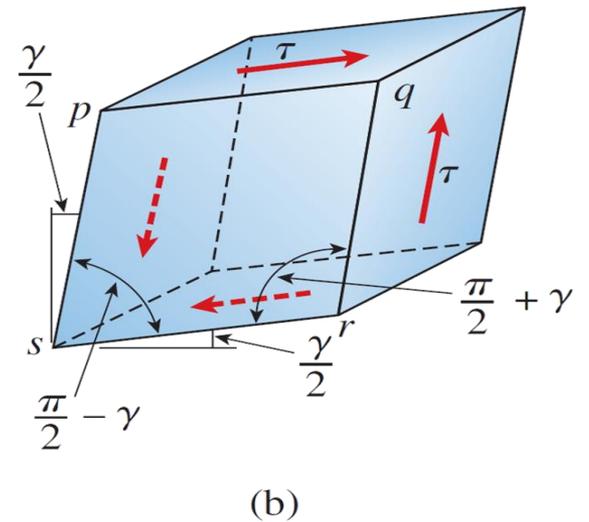
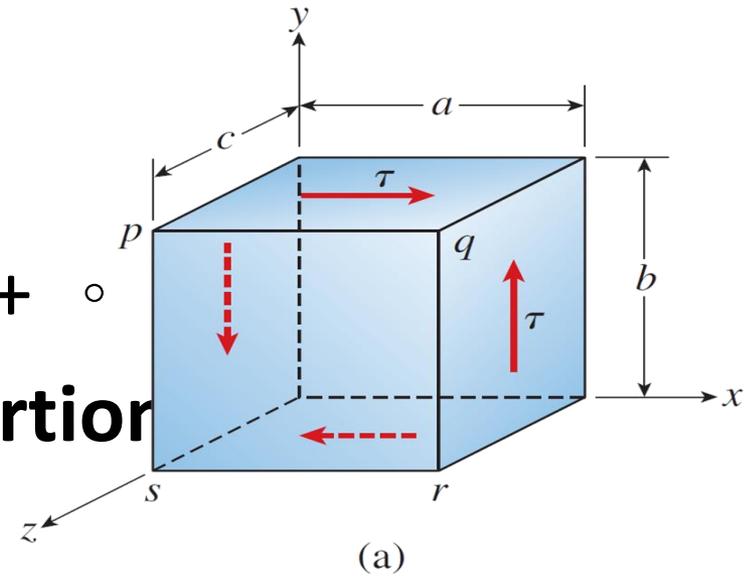


圖1-30 材料元素受剪應力和剪應變作用

剪應力和剪應變的符號規則

剪應力的符號規則：

- 作用於正軸向且為元素正面的剪應力為正，若是作用於相反的軸向的剪應力則為負。
- 若作用於相反軸向且為元素面為負面的剪應力為正，若作用於正軸且為元素正面的剪應力則為負。

剪應變的符號規則如下：

- 當兩正面(或兩反面)的交角減少，元素的剪應變為正；
- 當兩正面(或兩反面)的交角增加，元素的剪應變為負。

剪力的虎克定律

- 剪力的虎克定律(Hooke's law in shear) 方程式

$$\tau = G\gamma \quad (1-13)$$

- 式中的 **G** 為**剪彈性模數(shear modulus of elasticity)** (又稱為剛度模數(*modulus of rigidity*)) ◦

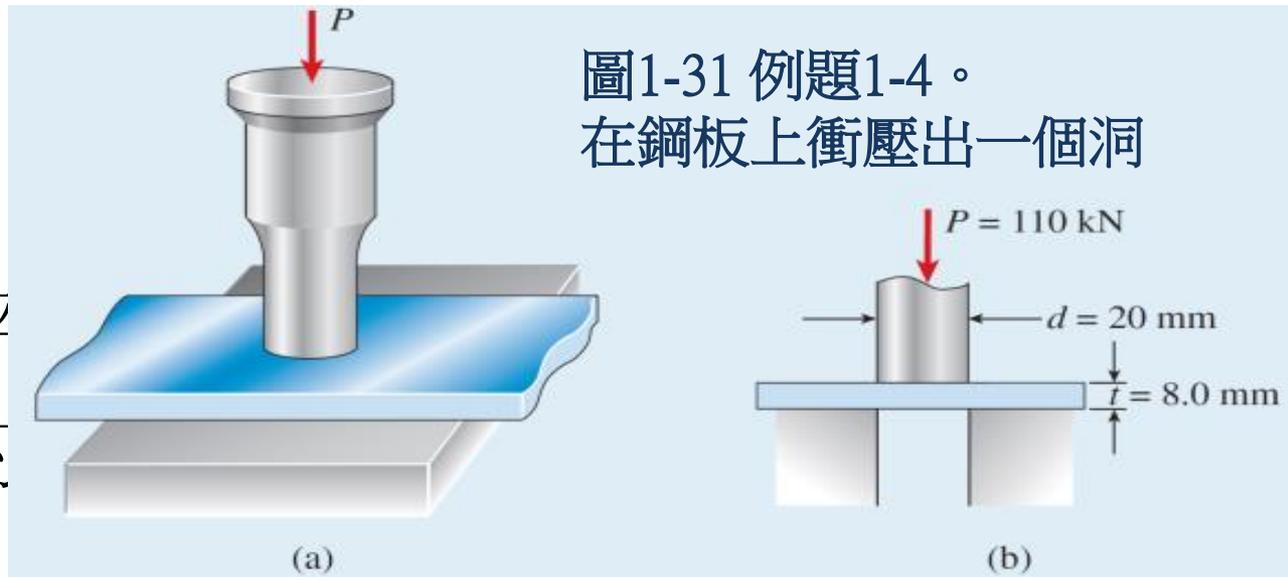
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1-14)$$

- 拉力與剪力的彈性模數以下列方程式連結：

例題1-4

衝壓機在鋼板上衝壓出一個洞示於圖1-31a。假設衝壓機的直徑 $d = 20\text{mm}$ ，在一厚 $t = 8\text{ mm}$ 的鋼板上衝壓一個洞，如剖視圖(圖1-31b) 所示。

如果需以別求鋼板的平均壓應力，及衝壓機的平均壓應力。



解

鋼板的平均剪應力為 P 力除以鋼板的剪面積 (shear area)，剪面積 A_s 等於洞的周長乘以鋼板厚度，或

$$A_s = \pi dt = \pi(20 \text{ mm})(8.0 \text{ mm}) = 502.7 \text{ mm}^2$$

式中的 d 為衝壓機直徑， t 為鋼板厚度。因此，鋼板的平均剪應力為：

$$\tau_{\text{aver}} = \frac{P}{A_s} = \frac{110 \text{ kN}}{502.7 \text{ mm}^2} = 219 \text{ MPa}$$

衝壓機的平均壓應力為：

$$\sigma_c = \frac{P}{A_{\text{punch}}} = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{110 \text{ kN}}{\pi(20 \text{ mm})^2/4} = 350 \text{ MPa}$$

式中的 A_{punch} 為衝壓機的橫截面積。

註：因為不計衝擊效應，當衝壓機衝壓出洞時，此分析為高度理想化。(算入衝擊效應需用更精進的分析法，而此分析法不在材料力學範疇內。)

例題1-5

一種支承墊頂部覆蓋一片鋼板(圖1-32a)，該墊由線性彈性材料(通常是彈性體，如橡膠)構成，用以支撐機械和橋樑的大樑之用。假設彈性體厚度為 h ，鋼板尺寸為 $a \times b$ ，支承墊受到水平剪力 V 作用。

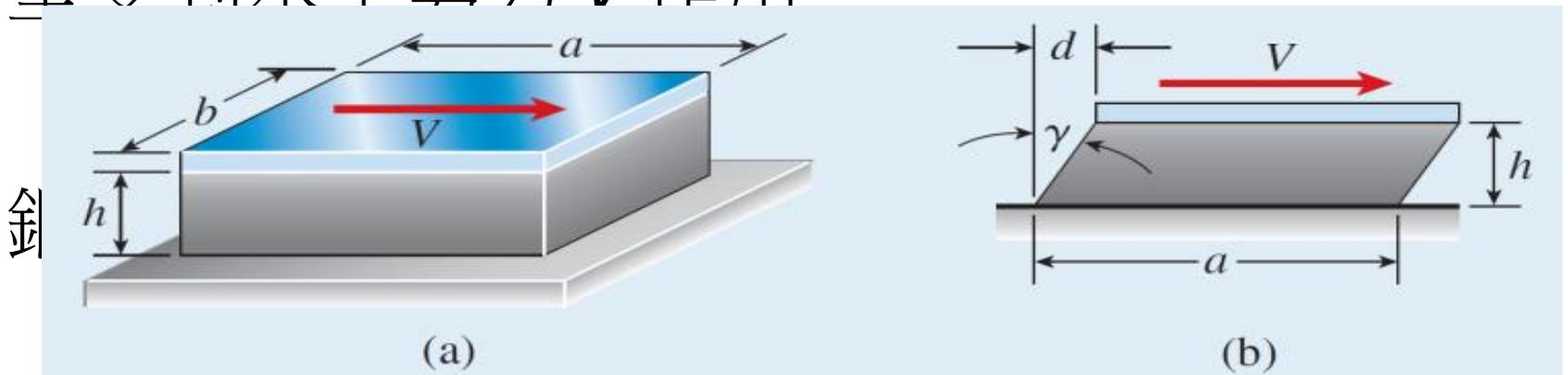
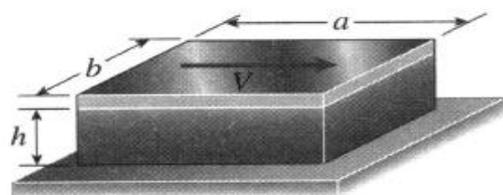


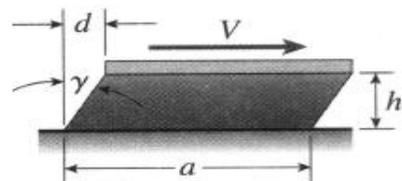
圖1-32 例題1-5。受剪力作用的支承墊

解

假設剪應力均佈於全彈性體上。則作用於彈性體水平面的剪應力等於剪應力 V 除以平面面積 ab (圖 1-32a) :



(a)



(b)

圖 1-32 例題 1-5。受剪力作用的支承墊

剪應力 V 除以平面面積 ab (圖 1-32a) :

$$\tau_{\text{aver}} = \frac{V}{ab} \quad (1-15)$$

相對剪應變 (由剪力的虎克定律, 式 (1-13)) 為 :

$$\gamma = \frac{\tau_{\text{aver}}}{G_e} = \frac{V}{abG_e} \quad (1-16)$$

式中的 G_e 是彈性體材料的剪模數。最後, 水平位移 d 等於 $h \tan \gamma$ (由圖 1-32b) :

$$d = h \tan \gamma = h \tan \left(\frac{V}{abG_e} \right) \quad (1-17)$$

大多實際情況下的剪應變 γ 為小角, 因此以 γ 代換 $\tan \gamma$, 可得 :

$$d = h\gamma = \frac{hV}{abG_e} \quad (1-18)$$

因為式 (1-17) 和式 (1-18) 是根據作用於整個彈性體材料的剪應力及剪應變皆為常數的假設, 所以, 能得出鋼板水平位移的近似結果。事實上, 材料邊緣的剪應力為零 (因為自由垂直面上沒有剪應力), 因此, 材料變形情況比圖 1-32b 圖示的變形複雜。無論如何, 如果相較於彈性體厚度 h , 鋼板長 a 比較大, 前述結果能在設計用途上, 達到令人滿意的效果。

1.7 容許應力和容許載重

ALLOWABLE STRESSES AND ALLOWABLE LOADS

- 研讀材料力學時，主要的設計影響為**強度 (strength)**，即物體支撐或傳遞承載的能力。
- 能夠支承載重的物體包括建築物、機械、貨櫃、卡車、飛機、船舶等等。簡單來說，我們可視這些物體為**結構(structures)**

安全係數

- 安全係數(factor of safety)

$$\text{安全係數 } n = \frac{\text{實際強度}}{\text{所需強度}} \quad (1-19)$$

- 安全限度(margin of safety)

$$\text{安全限度} = n - 1 \quad (1-20)$$

- 容許應力(allowable stress, 或工作應力(working stress))

$$\sigma_{allow} = \frac{\sigma_Y}{n_1} \quad \text{及} \quad \tau_{allow} = \frac{\tau_Y}{n_2} \quad (1-22a,b)$$

容許應力

- 容許應力(allowable stress，或工作應力 (working stress)) $\frac{\text{降伏強度}}{\text{安全係數}}$ (1-21)

$$\sigma_{allow} = \frac{\sigma_Y}{n_1} \quad \text{及} \quad \tau_{allow} = \frac{\tau_Y}{n_2} \quad (1-22a,b)$$

$$\sigma_{allow} = \frac{\sigma_U}{n_3} \quad \text{及} \quad \tau_{allow} = \frac{\tau_U}{n_4} \quad (1-23a,b)$$

- 極限應力(ultimate stress)

容許載重

- 建立特定材料和結構的容許應力後，就能求結構的容許載重(allowable load)，又稱安全載重(safe load)

$$\text{容許載重} = (\text{容許應力})(\text{面積})$$

- 受直接拉力及直接壓力(無屈曲)作用的桿件(1-24) 其方程變為:
- 以直接剪力 P_{allow} 作用的銷來說，式(1-24)變為(1-25)
- 容許支承載重 $P_{allow} = \tau_{allow} A$ (1-26)

$$P_{allow} = \sigma_b A_b \quad (1-27)$$

例題1-6

一鋼桿製的垂直吊架支撐工廠的重機械，並利用圖1-33所示螺栓接頭附接於支座上。兩固定角鋼利用直徑為 12 mm 的 1 與 2 螺栓固定於上部支座上，各螺栓的墊圈直徑為 $d = 28$ mm。吊架主體利用單一螺栓(直徑 $d = 25$ mm) 附接於固定角鋼(圖1-33a 的螺栓3)。 b 矩形橫截面吊架的寬度為 $b = 38$ mm，厚度為 $t = 13$ mm，但是在螺栓接頭部分，吊架寬度放大為 $b = 75$ mm。

利用下面各小題的條件，求載重 P 的容許值。

例題1-6

- (a) 若吊架主體的容許拉應力為110 MPa。
- (b) 若吊架穿過螺栓3孔橫截面的容許拉應力為75 MPa。(此處的容許應力較小，因為圓孔的應力集中。)
- (c) 若吊架與螺栓3桿柄的容許支承應力為180 MPa性質:

$$t_c = 9.5\text{mm} \quad t = 13\text{mm} \quad b_1 = 38\text{mm} \quad b_2 = 75\text{mm}$$

$$d_1 = 12\text{mm} \quad d = 25\text{mm} \quad d_w = 28\text{mm}$$

$$\sigma_a = 110\text{MPa} \quad \sigma_{a3} = 75\text{MPa} \quad \sigma_{ba3} = 180\text{MPa} \quad \tau_{a3} = 45\text{MPa}$$

$$\tau_{a1} = 35\text{MPa} \quad \sigma_{a1} = 160\text{MPa} \quad \sigma_{ba1} = 65\text{MPa}$$

解

(a) 利用支架主體的應力 (圖 1-33c) 等於容許應力乘以支架的橫截面積 (式 (1-25)), 所以容許載重 P_a 為

$$P_a = \sigma_a b_1 t = (110 \text{ MPa})(38 \text{ mm} \times 13 \text{ mm}) = 54.3 \text{ kN}$$

若載重超過此值, 支架主體的應力將過大 (即實際應力超過容許應力), 也就降低了安全係數。

(b) 在支架橫截面有螺孔穿過部分 (圖 1-33d) 必須進行類似的計算, 但是容許應力及面積不同。淨橫截面積 (即桿穿孔後的剩餘面積) 等於淨寬乘以厚度, 淨寬等於總寬 b_2 減孔徑 d 。因此, 該截面的容許載重 P_b 為:

$$P_b = \sigma_{a3} (b_2 - d) t = (75 \text{ MPa})(75 \text{ mm} - 25 \text{ mm})(13 \text{ mm}) = 48.8 \text{ kN}$$

(c) 利用支架與螺栓間的支承應力的容許載重 (圖 1-33e), 等於容許支承應力乘以支承面積。支承面積是真正接觸面積的投影, 等於螺栓直徑乘以支架厚度。所以, 容許載重 (式 1-27) 為:

$$P_c = \sigma_{ba3} d t = 58.5 \text{ kN} = (180 \text{ MPa})(25 \text{ mm})(13 \text{ mm}) = 58.5 \text{ kN}$$

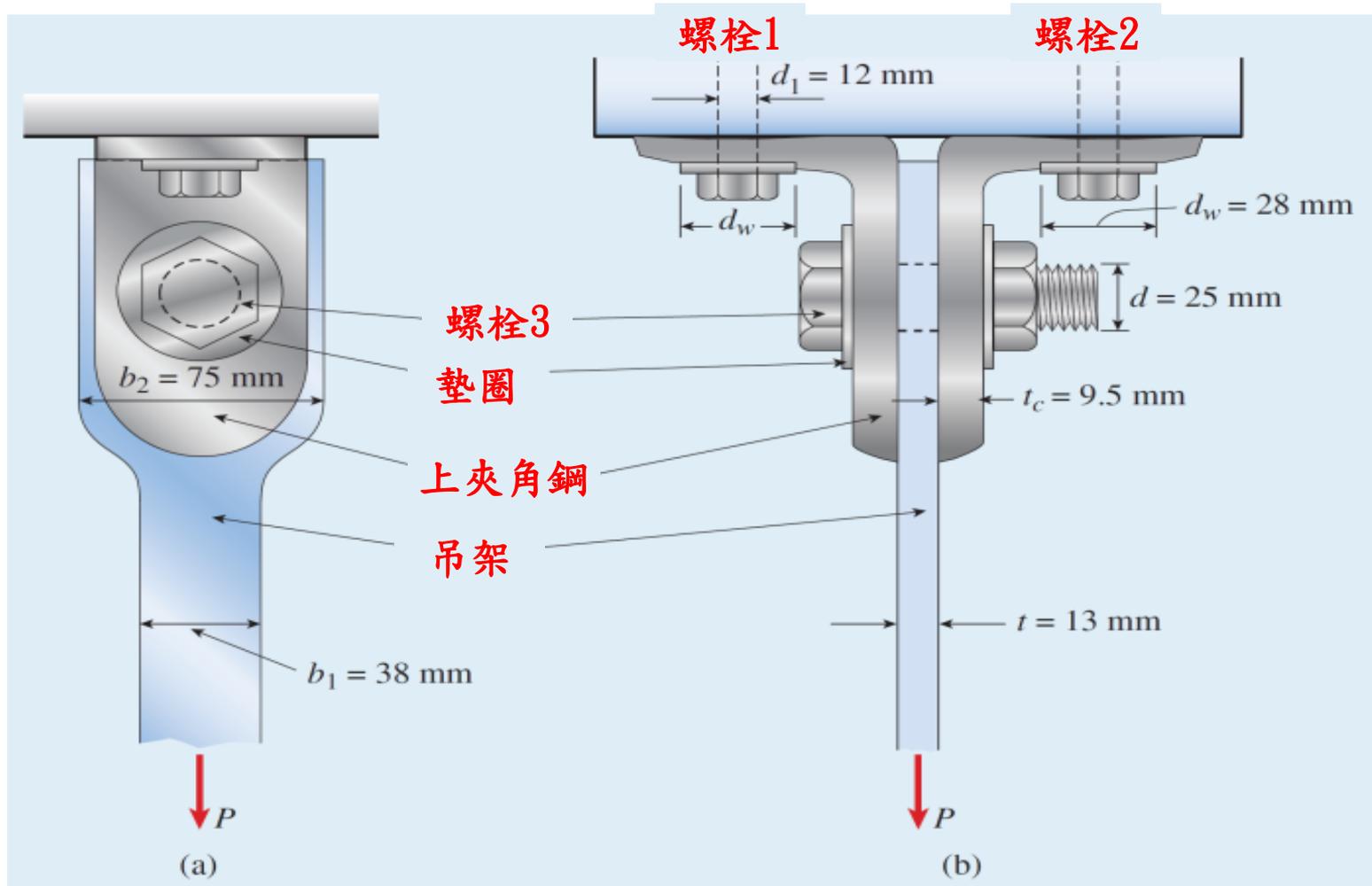


圖1-33 例題1-6。受到 P 拉載重作用的垂直吊架：
(a)螺栓接頭的前視圖；(b)接頭的側視圖

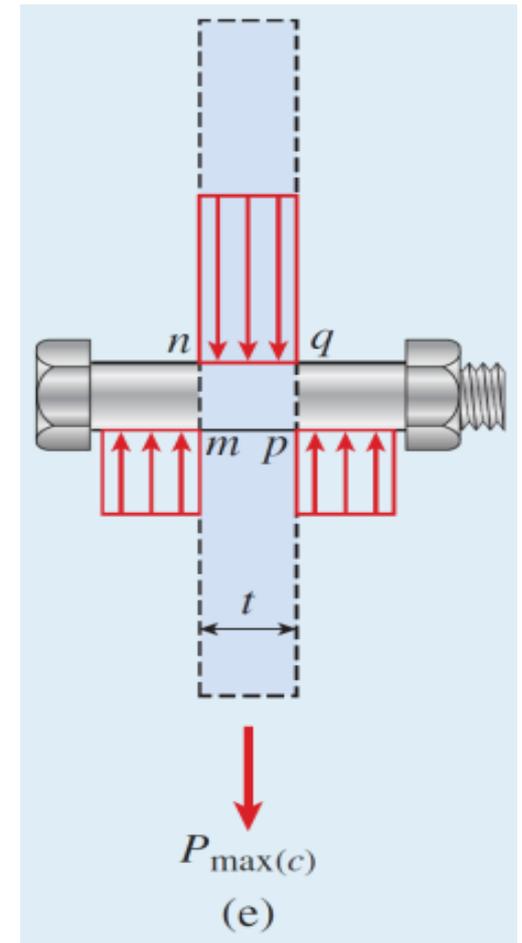
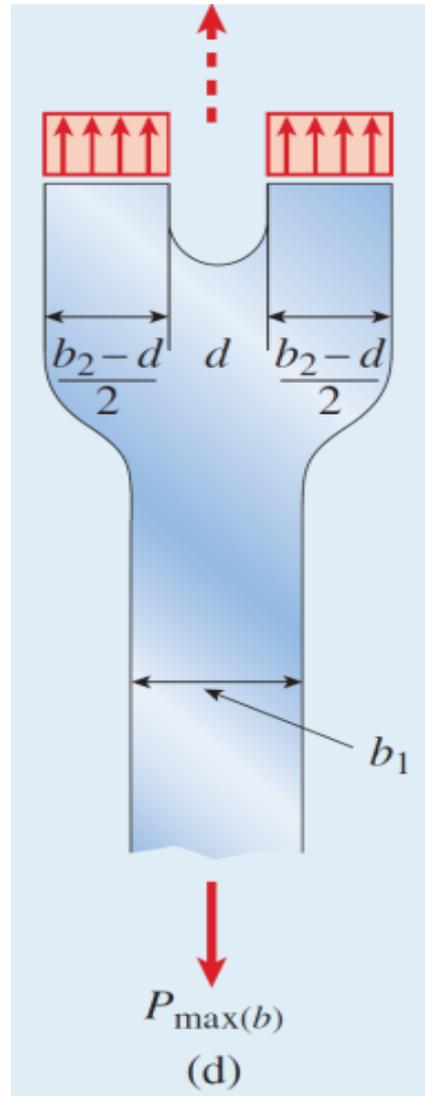
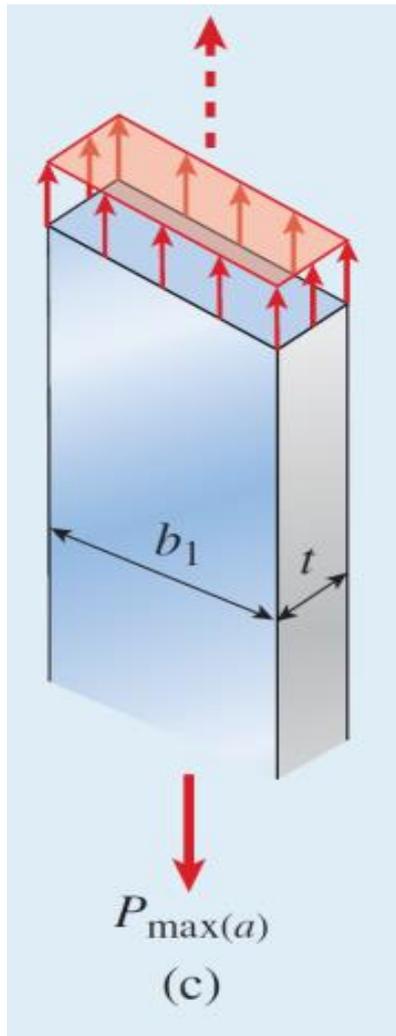


圖1-33 (續)

1.8 軸向載重和直接剪力的設計

DESIGN FOR AXIAL LOADS AND DIRECT SHEAR

- 在材料力學內容裡，分析(**analysis**)包括了求結構對載重的反應(**response**)、溫度變化及其他實質的作用。我們將載重作用產生的應力、應變和變形視為結構的反應。
- **設計(design)**。設計結構時，我們需求得結構性質，才能讓結構支撐載重，並表現預設的功能。

$$\text{所需面積} = \frac{\text{欲傳遞的載重}}{\text{容許應力}} \quad (1-28)$$

- 除了考量到**強度(strength)**，結構設計可能也牽涉到**勁度(stiffness)**及**穩度(stability)**。

1.8 軸向載重和直接剪力的設計

DESIGN FOR AXIAL LOADS AND DIRECT SHEAR

- 設計結構的另一過程為**最佳化(optimization)**，其任務為設計最好的結構以迎合特定目標，如最小重量。
- 分析或設計結構時，我們可將作用於結構的力視為載重(**loads**)或反作用(**reactions**)。
- 例題**1-7** 由討論自由體圖(**free-body diagrams**)及基礎靜力學著手，並以受拉桿件和受直接剪力的銷設計作為結束。

例題1-7

圖1-34所示為一纜線與管桿結構，銷支於相隔 1.8 m 的 A 、 D 點上。 ABC 桿為鋼管， BDC 則為繞過無摩擦 D 滑輪的連續纜線。重 6.6 kw 的招牌掛在 ABC 桿上的 E 、 F 處。

若容許剪應力為 45 MPa，求 A 、 B 、 C 、 D 銷的所需尺寸。若容許的拉、壓應力分別為 124 MPa 及 69 MPa，求 ABC 桿及 BDC 纜線所需的橫截面積。(因為挫曲不穩定的可能性，容許壓應力小於容許拉應力。)

(註：支撐的銷為雙剪，同時僅考慮招牌的重量， ABC 與 BDC 桿的重量則不計。)

解

第一步先求出支座的反力與 BDC 連續纜線的拉力，可由自由體圖的靜力學得到。只要得到這些值，就可求得 ABC 桿的軸向力，及 A 、 B 、 C 及 D 銷的剪力，然後找出 ABC 桿及 A 、 B 、 C 、 D 銷所需的尺寸。

反力 先由整體結構的自由體圖（圖 1-35）開始，圖上顯示所有施加的力與反力，應用慣用符號規則，讓所有的分量指向座標正方向。

總和對 D 點的力矩（逆鐘向為正），得到

$$\Sigma M_D = 0 \quad A_x(1.8 \text{ m}) - \frac{W}{2}(0.45 \text{ m} + 2.25 \text{ m}) = 0$$

$$\text{或} \quad A_x = \frac{6.6 \text{ kN} \left(\frac{2.7 \text{ m}}{1.8 \text{ m}} \right)}{2} = 4.95 \text{ kN}$$

其次，總和 x 向的力：

$$\Sigma F_x = 0 \quad A_x + D_x = 0 \quad \text{或} \quad D_x = -A_x = -4.95 \text{ kN}$$

負號表示 D_x 作用於負的 x 向。

總和在 D 節點的 x 向力，可得到 BDC 連續纜線的力。

先計算 α_B 、 α_C 角（見圖 1-35）：

$$\alpha_B = \arctan\left(\frac{1.8}{1.2}\right) = 56.31^\circ \quad \alpha_C = \arctan\left(\frac{1.8}{2.4}\right) = 36.87^\circ$$

在節點 D 點， $\Sigma F_x = 0$ ：

$$D_x + T(\cos(\alpha_B) + \cos(\alpha_C)) = 0 \quad \text{所以} \quad T = \frac{-D_x}{(\cos(\alpha_B) + \cos(\alpha_C))}$$

$$\text{或} \quad T = \frac{-(-4.95 \text{ kN})}{(\cos(\alpha_B) + \cos(\alpha_C))} = 3.65 \text{ kN}$$

由纜線的連續性 (見圖 1-36)，得到 $T_B = T_C$ ，然後求 D 節點的垂直反力。

$$D_y = T(\sin(\alpha_B) + \sin(\alpha_C)) = 5.23 \text{ kN}$$

正號表示 D_y 作用於正 y 向。

所以， D 點的合力為

$$D_{\text{res}} = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = 7.2 \text{ kN}$$

其次，總和整體自由體圖 y 向的力，得到 A_y ：

$$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + D_y - W = 0 \quad \text{所以} \quad A_y = -D_y + W = 1.37 \text{ kN}$$

A 的合力為

$$A_{\text{res}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 5.14 \text{ kN}$$

最後檢驗利用 ABC 管的自由體圖 (見圖 1-37, $T_B = T_C$)，驗證平衡：即合力為零，而且對 A 點的合力矩也為零。

$$\Sigma F_x : A_x - T \cos(\alpha_B) - T \cos(\alpha_C) = 0$$

$$\Sigma F_y : A_y - W + T \sin(\alpha_B) + T \sin(\alpha_C) = 0$$

$$\Sigma M_A : T \sin(\alpha_B)(0.45 \text{ m} + 0.75 \text{ m}) + T \sin(\alpha_C)(2.4 \text{ m}) - \frac{W}{2}(0.45 \text{ m} + 2.25 \text{ m}) = 0$$

求銷的剪應力 (全部為雙剪) 及各銷所需尺寸 現在反力及纜線力為已知，可列出 A 、 B 、 C 及 D 銷的力，然後求各銷所需的尺寸。

A 銷：

$$A_{\text{pin}A} = \frac{A_{\text{res}}}{2\tau_{\text{allow}}} = \frac{5.14 \text{ kN}}{2(45 \text{ MPa})} = 57.1 \text{ mm}^2$$

$$\text{所以 } d_{\text{pin}A} = \sqrt{\frac{4}{\pi}(57.1 \text{ mm}^2)} = 8.53 \text{ mm}$$

B 銷：

$$A_{\text{pin}B} = \frac{T}{2\tau_{\text{allow}}} = \frac{3.65 \text{ kN}}{2(45 \text{ MPa})} = 40.6 \text{ mm}^2$$

$$\text{所以 } d_{\text{pin}B} = \sqrt{\frac{4}{\pi}(40.6 \text{ mm}^2)} = 7.19 \text{ mm}$$

C 銷： C 點的合力與 B 相同，所以 C 銷的尺寸與 B 銷同。

D 滑輪銷：

$$A_{\text{pin}D} = \frac{D_{\text{res}}}{2\tau_{\text{allow}}} = \frac{7.2 \text{ kN}}{2(45 \text{ MPa})} = 80 \text{ mm}^2$$

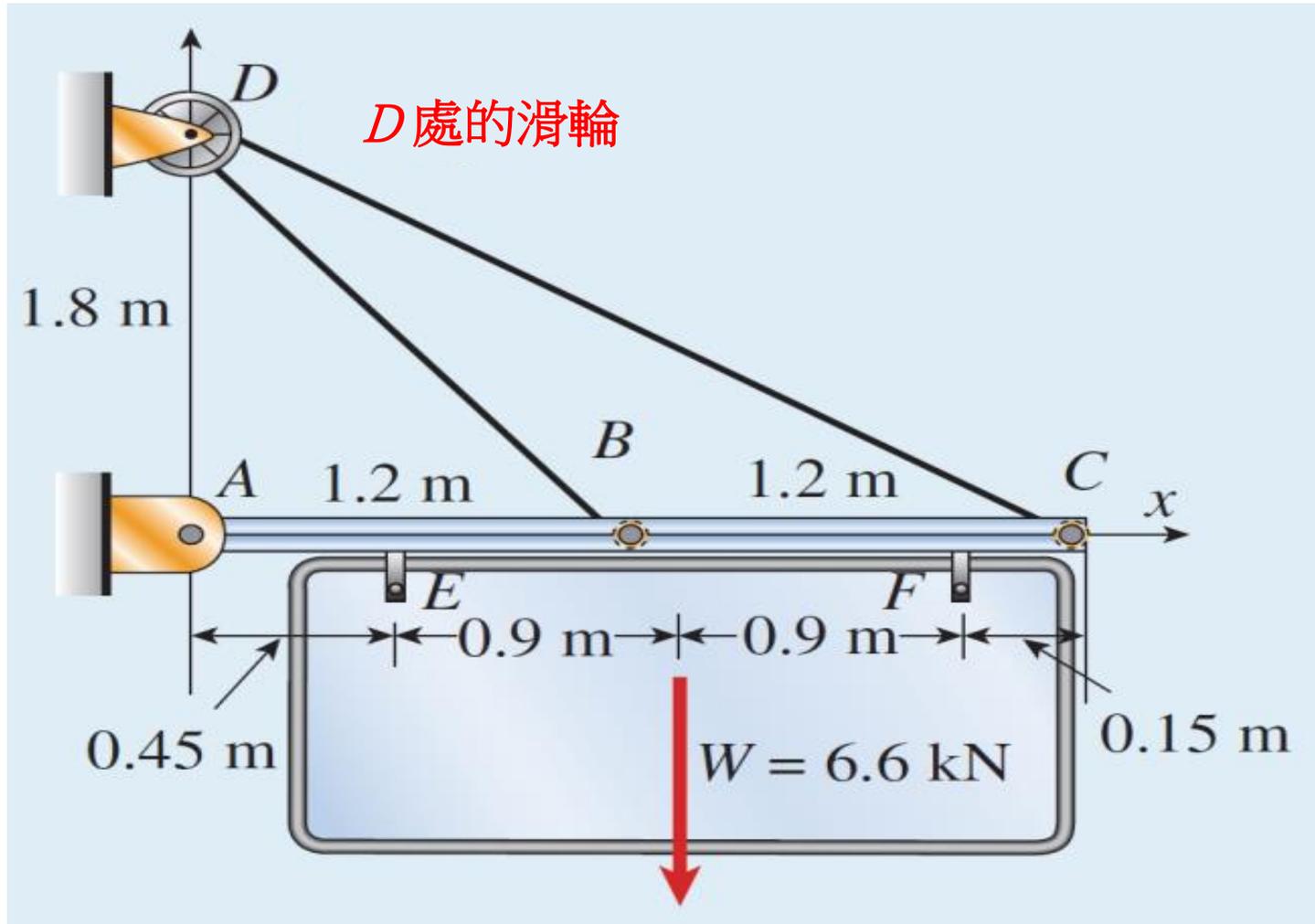
$$\text{所以 } d_{\text{pin}D} = \sqrt{\frac{4}{\pi}(80 \text{ mm}^2)} = 10.09 \text{ mm}$$

求 BDC 纜線軸力及其所需橫截面積 利用算出的拉力 T ，及桿件更大的桿件容許拉應力：

$$A_{\text{cable}} = \frac{T}{\sigma_{\text{allow}T}} = \frac{3.65 \text{ kN}}{69 \text{ MPa}} = 52.9 \text{ mm}^2$$

求 ABC 管的軸力及其所需的橫截面積 利用 ABC 桿部分的自由體圖，計算 AB 與 BC 段的軸壓力 N 。 AB 段的力為 $N_{AB} = -4.95 \text{ kN}$ ，而 BC 段為 $N_{BC} = -2.92 \text{ kN}$ 。較大的 N_{AB} 控制。現在使用較小的容許軸向壓應力，所以面積為：

$$A_{\text{pipe}} = \frac{4.95 \text{ kN}}{\sigma_{\text{allow}C}} = \frac{4.95 \text{ kN}}{69 \text{ MPa}} = 71.7 \text{ mm}^2$$



D 處的滑輪

圖1-34 例題1-7。纜線支撐的ABC管加掛重 W 的招牌

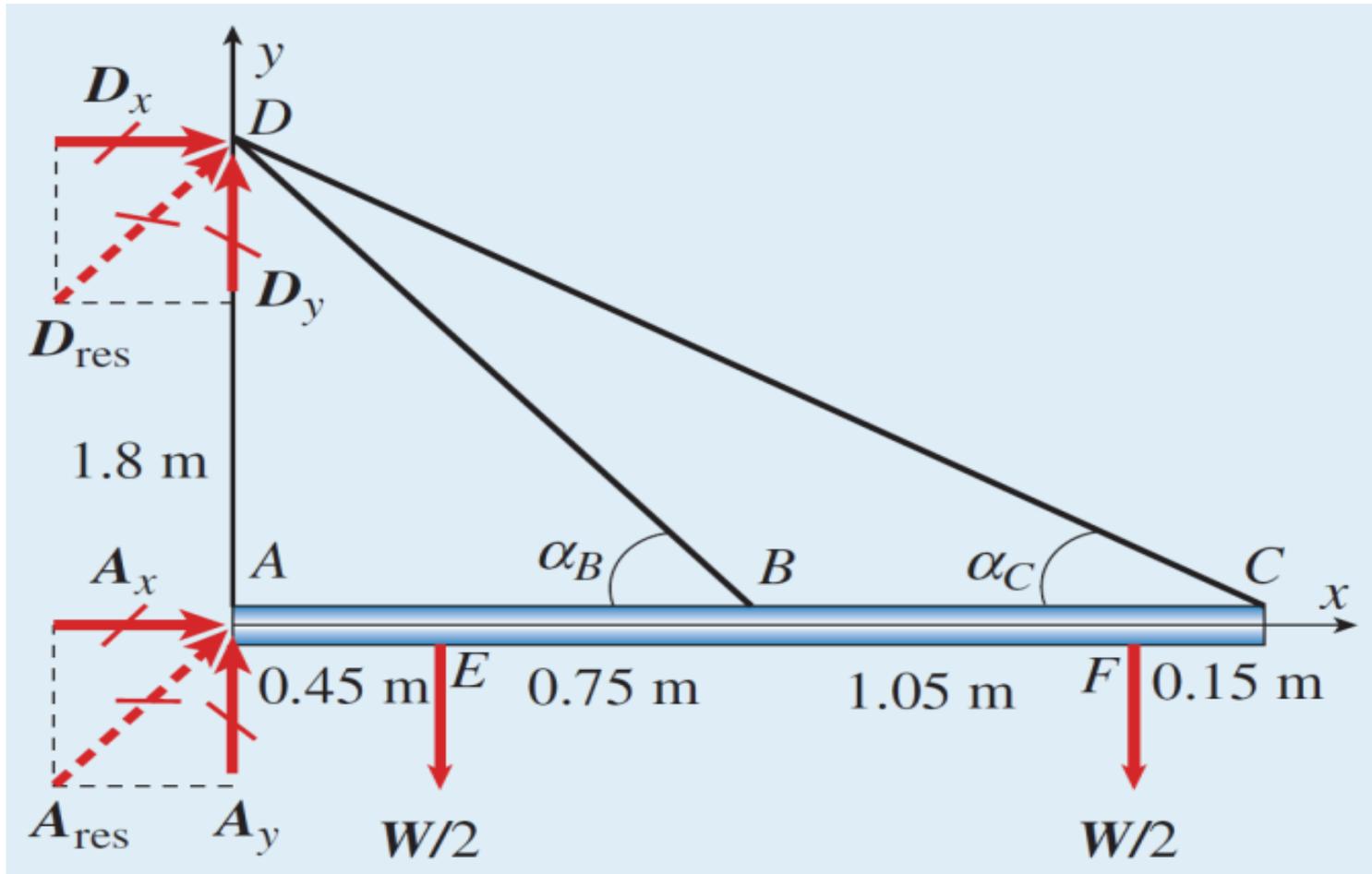


圖1-35 例題1-7。整體結構的自由體圖

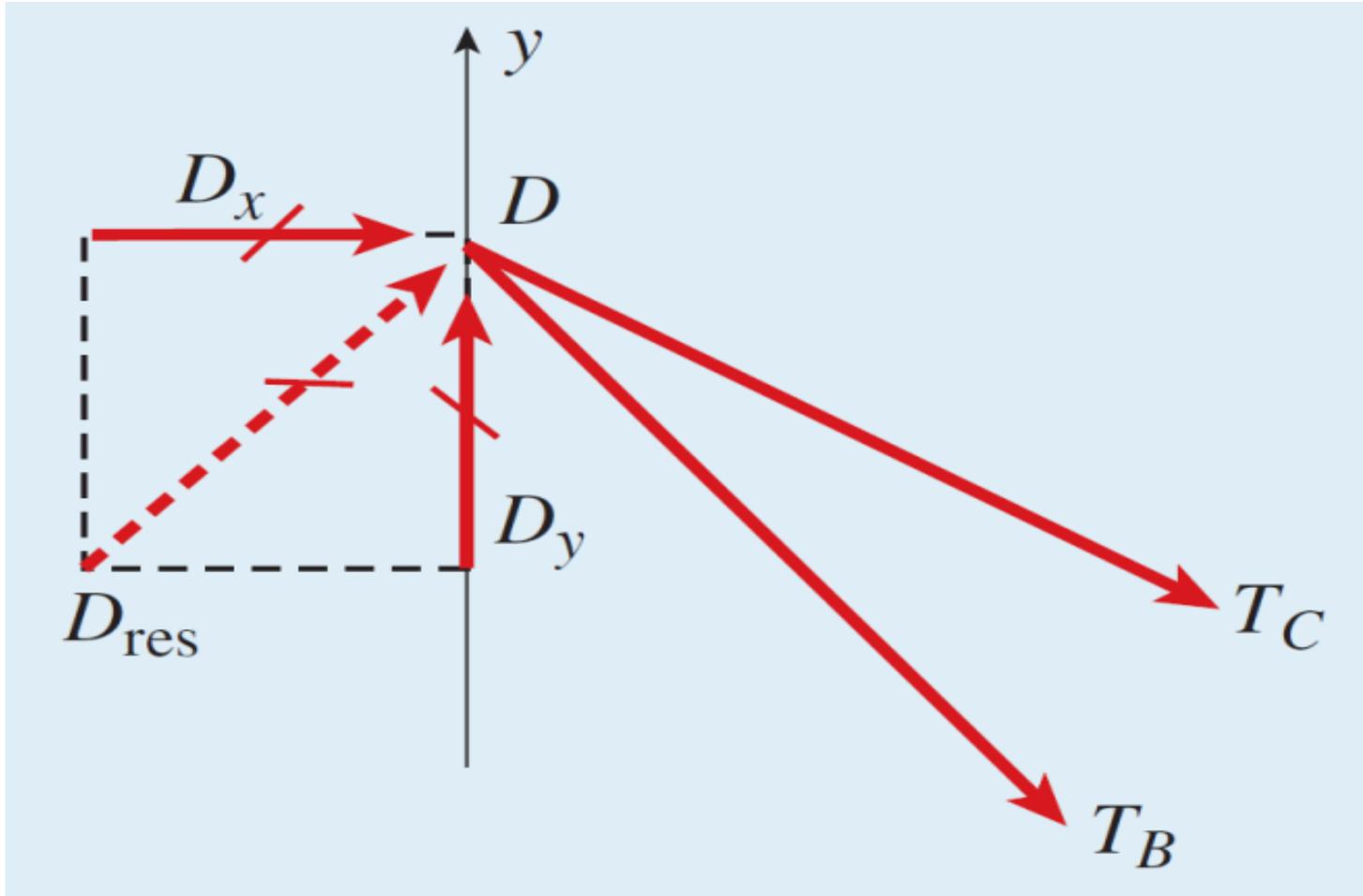


圖1-36 例題1-7。 D 節點的自由體圖

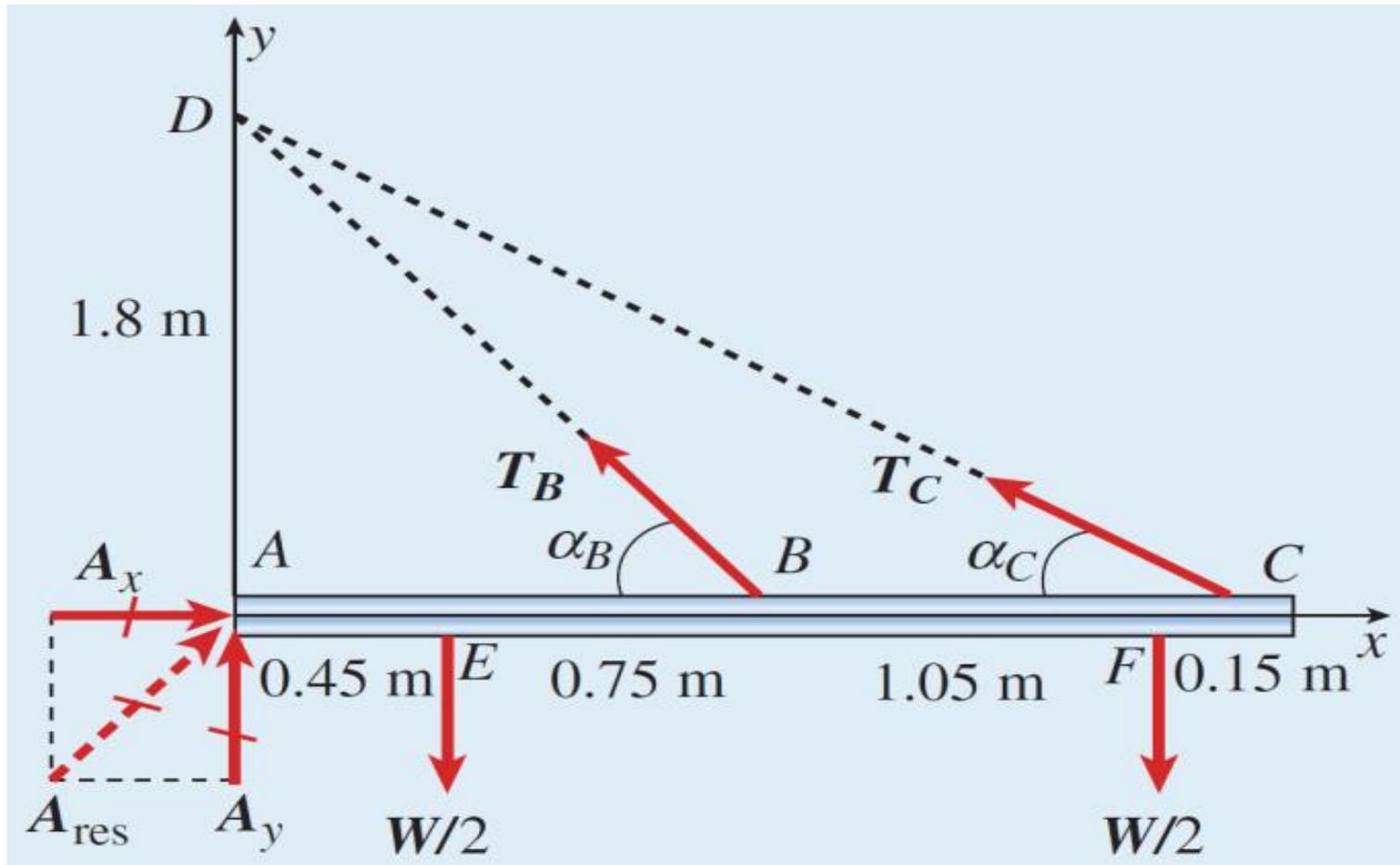


圖1-37 例題1-7。ABC桿的自由體圖